510
B64m
1919
v.1

Bork—Rath

Mathematische Hauptsätze

Ausgabe für Gymnasien

Erster Teil

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

510.2
B64m
V.1
1919

Professor Dr. Heinrich Borks

Mathematische Hauptsätze.

Ausgabe für Gymnasien.

Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben

von

Professor Dr. Max Nath,
weil. Direktor des Realgymnasiums zu Pankow bei Berlin.

Erster Teil.

Pensum der Unterstufe (bis zur Untersekunda einschl.).

Elfte verbesserte Auflage.

Leipzig,
O. R. Reisland.
1923.

510.
B64m
V.1

Vorwort zur elften Auflage.

Die elfte Auflage weist einige Änderungen und Ergänzungen auf. Die Änderungen betreffen zunächst § 23, 8 in Verbindnng mit § 40, 9. 10, wo auf den Unterschied zwischen Kreisbogen und Ausschnitt einerseits, Sehne und Abschnitt andrerseits in ihrer Abhängigkeit vom Mittelpunktswinkel hingewiesen wird. Zur Erklärung und Einübung des Funktionsbegriffes dürften sich schwerlich bessere Beispiele finden. Die an die Schlüsse der Regeldetri gewöhnten Schüler lernen hier wohl zum erstenmal Ausnahmen kennen, und es ist vielleicht nicht überflüssig, im Unterricht darauf hinzuweisen, daß die Schwierigkeit der Sehnenberechnung die Entwicklung einer besonderen Lehre, nämlich der Trigonometrie, notwendig macht, während die Einfachheit der Bogenberechnung mit der Einrichtung des Transporteurs in engstem Zusammenhang steht.

Die Änderungen betreffen ferner § 38, 7, wo zur Berechnung von π die Formeln für s_{2n} und ϱ_{2n} ergänzt sind; außerdem § 48, wo auf Anwendungen der Formel $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ zum Kopfrechnen aufmerksam gemacht ist.

Völlig neu ist § 53, enthaltend graphische Lösungen von Gleichungen in möglichst knapper Darstellung, namentlich soweit Figuren in Betracht kommen. Diese sind daher, in mehrere Teile zerlegt, am besten mit größerer Längeneinheit auf Millimeterpapier von den Schülern nachzuzeichnen. Über den Wert graphischer Lösungen bedarf es wohl keiner ausführlichen Darlegung. Ihre Verwendung in den Mittelklassen rechtfertigt sich in dem Maße, als es möglich ist, die Beweise einfach und kurz zu gestalten und die Beispiele ebenfalls der bei langwierigen Rechnungen oder Zeichnungen bald versagenden Ausdauer der Schüler anzupassen. Es kann etwa § 53, 1—9 und 14 in Obertertia nach der Ähnlichkeitslehre und dem Pythagoras, 10—13 in Untersekunde be-

575531

handelt werden; falls die Zeit in Obertertia nicht reicht, kann § 53, 2 und 8, schließlich auch 9 nach Untersekunde verschoben werden.

Am Schluß ist dem Buch eine arithmetische Formelsammlnng angefügt, welche nicht alle, sondern nur die zum Lösen von Aufgaben wichtigsten Formeln enthält. Sie soll dazu dienen, die Schüler auf die einfachsten Anwendungen sowie auf Ähnlichkeiten und Gegensätze hinzuweisen, sie dadurch im **Kopfrechnen mit Buchstaben** zu üben und vor allzu mechanischem Auswendiglernen zu bewahren. Letzteres verhindert man überdies durch einfachen Wechsel der Buchstaben oder leichte Änderung der Beispiele.

Die Schüler sind noch nicht reif genug, sich allein einen solchen Auszug aus dem arithmetischen Lehrstoff zusammenzustellen. Sie können sich daher schwer einen Überblick über das, was sie brauchen, verschaffen, und aus dieser Unfähigkeit stammt häufig die Abneigung und der Schrecken vor der Mathematik.

Berlin, im März 1923.

Prof. M. Heinrich, Studienrat.

Vorwort zur sechsten Auflage.

Das Buch ist einer erneuten Durchsicht unterworfen worden. Infolgedessen konnte eine Anzahl von Druckfehlern und orthographischen Unregelmäßigkeiten entfernt werden. An einigen wenigen Stellen sind auch geringfügige textliche Änderungen eingetreten.

Pankow bei Berlin, im August 1909.

Rath.

Einige, in früheren Auflagen abgedruckte Vorworte sind, um Kosten zu sparen, weggelassen worden.

Der Verlag.

Inhalts-Angabe.

A. Rechnen (als Vorstufe der Mathematik).

Seite

§ 1. Die vier Grundrechnungsarten (Spezies) 13
§ 2. Teilbarkeit der Zahlen 14
§ 3. Von den Brüchen 16
§ 4. Von den Dezimalbrüchen 17
§ 5. Maße und Gewichte 20

B. Mathematik.

§ 6. Von den Größen 23
§ 7. Von den Raumgrößen 25

I. Planimetrie.

Erster Abschnitt. Gerade, Strecken, Winkel, Figuren 27

§ 8. Von den Strecken 27
§ 9. Von den Winkeln 28
§ 10. Nebenwinkel und Scheitelwinkel 31
§ 11. Gegenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzte Winkel 33
§ 12. Von den Parallelen 34
§ 13. Von den ebenen Figuren 37
§ 14. Von den Seiten und Winkeln der Dreiecke 37

Zweiter Abschnitt. Die Kongruenz der Dreiecke nebst Anwendungen . . . 40

§ 15. Von der Kongruenz der Dreiecke 40
§ 16. Lehrsätze vom gleichschenkligen Dreieck 49
§ 17. Die planimetrischen Grundaufgaben 50
§ 18. Örter 58
§ 19. Merkwürdige Linien und Punkte des Dreiecks 61

Dritter Abschnitt. Sätze über Vierecke 67

§ 20. Von den Parallelogrammen 67
§ 21. Vom Trapez 71
§ 22. Von den Vierecken 73

Seite

Vierter Abschnitt. Kreissätze 73

§ 23. Von den Sehnen des Kreises 73
§ 24. Von den Tangenten des Kreises 77
§ 25. Winkel im und am Kreise 82
§ 26. Beziehungen zweier Kreise 86

Fünfter Abschnitt. Konstruktionsaufgaben (Musterbeispiele und Hilfssätze) . 91

§ 27. Allgemeines über die Lösung von Konstruktionsaufgaben . . 91
§ 28. Methode der geometrischen Örter 92
§ 29. Methode der Reduktion 95
§ 30. Methode der Parallelverschiebung und der Umlegung 104

Sechster Abschnitt. Vergleichung und Messung des Flächeninhalts der Vielecke 108

§ 31. Vergleichung des Flächeninhalts von Parallelogrammen und Dreiecken 108
§ 32. Messung des Flächeninhalts von Rechtecken und anderen Vielecken 112
§ 33. Der pythagoreische Lehrsatz 119

Siebenter Abschnitt. Proportionalität von Strecken und Ähnlichkeit von Figuren 127

§ 34. Von der Proportionalität der Strecken 127
§ 35. Von der Ähnlichkeit der Dreiecke und Vielecke 135
§ 36. Anwendungen der Ähnlichkeitssätze 142

Achter Abschnitt. Regelmäßige Vielecke, Kreisteilung und Kreisberechnung 147

§ 37. Inhaltsbestimmungen des Dreiecks 147
§ 38. Von den regelmäßigen Vielecken 148
§ 39. Von der Kreisteilung 152
§ 40. Berechnung des Kreisumfangs und des Kreisinhalts 154

II. Arithmetik (Algebra).

§ 41. Größen und Zahlen. Gleichungen 159
§ 42. Addition 160
§ 43. Subtraktion 161
§ 44. Von der Null und den algebraischen Größen 164
§ 45. Multiplikation 166
§ 46. Formeln 169
§ 47. Division 170
§ 48. Verhältnisse und Proportionen 175
§ 49. Potenzierung 179
§ 50. Radizierung 182
§ 51. Logarithmierung 188
§ 52. Gleichungen ersten und zweiten Grades 190
§ 53. Graphische Lösung von Gleichungen 196

A. Rechnen

(als Vorstufe der Mathematik).

---

§ 1. Die vier Grundrechnungsarten (Spezies).

Die vier Grundrechnungsarten sind Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren.

1) **Addieren** heißt hinzufügen (zusammenzählen). Das Zeichen der Addition ist ein stehendes Kreuz (+) und wird „plus" gelesen.

Die Zahlen, die addiert werden sollen, heißen **Summanden** (Posten). Durch Addition entsteht eine **Summe.**

2) **Subtrahieren** heißt abziehen (wegnehmen). Das Zeichen der Subtraktion ist ein wagerechter Strich (−) und wird „minus" gelesen.

Die Zahl, von der subtrahiert werden soll, heißt **Minuendus;** die Zahl, die subtrahiert werden soll, heißt **Subtrahendus.** Durch Subtraktion entsteht eine **Differenz** (Unterschied, Rest).

3) **Multiplizieren** heißt vervielfältigen. Das Zeichen der Multiplikation ist ein Punkt (·) und wird „multipliziert mit" oder auch „mal" gelesen.

Die Zahl, die multipliziert werden soll, heißt **Multiplikandus;** die Zahl, mit der multipliziert werden soll, heißt **Multiplikator;** beide Zahlen heißen auch **Faktoren.** Durch Multiplikation entsteht ein **Produkt.**

4) **Dividieren** heißt teilen. Das Zeichen der Division ist ein Doppelpunkt (:) und wird „geteilt durch" oder „durch" gelesen.

Es gibt zwei Arten der Division:

a) Teilen, z. B. 40 m : 5 = 8 m (der fünfte Teil von 40 m ist 8 m);
b) Messen, z. B. 40 m : 5 m = 8 (5 m sind in 40 m 8mal enthalten).

Die Zahl, die dividiert werden soll, heißt **Dividendus;** die Zahl, durch die dividiert werden soll, heißt **Divisor.** Durch Division entsteht ein **Quotient.**

Zeichenregeln. 1) Die Zeichen · und : verbinden nur die benachbarten Zahlen, die Zeichen + und − verbinden auch Produkte und Quotienten. 2) Die vor oder nach einer Klammer stehenden Zeichen beziehen sich stets auf den ganzen Klammerausdruck.

$$5 \cdot 9 + 15 : 3 = 50,$$
$$5 \cdot (9 + 15 : 3) = 70,$$
$$(5 \cdot 9 + 15) : 3 = 20.$$

Die Potenz. Wie man $10 \cdot 5$ zur Abkürzung für $10 + 10 + 10 + 10 + 10$ schreibt, so schreibt man 10^5 statt $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$; man liest 10^5 „Zehn hoch fünf" oder „Die fünfte Potenz von zehn", oder „Zehn zur fünften". Eine Zahl **potenzieren** bedeutet ein Produkt bilden, das diese Zahl so oft als Faktor enthält, wie die rechts oben stehende Zahl angibt; z. B.

$$2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$
$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243,$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000.$$

§ 2. Teilbarkeit der Zahlen.

1) Eine **Primzahl** ist eine Zahl, die durch keine andere Zahl (ohne Rest) teilbar ist.
2) Eine **zusammengesetzte Zahl** ist eine Zahl, die durch andere Zahlen (ohne Rest) teilbar ist.
3) Eine zusammengesetzte Zahl **in Primfaktoren zerlegen** bedeutet sie als ein Produkt von Primzahlen darstellen; z. B. $504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ $(= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7)$.
4) Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine Null oder durch 2 teilbar ist.

   Eine **gerade Zahl** ist eine Zahl, die durch 2 teilbar ist. Eine **ungerade Zahl** ist eine Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist.
5) Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (Summe der Ziffern der Zahl) durch 3 teilbar ist.
6) Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre beiden letzten Ziffern Nullen sind oder eine durch 4 teilbare Zahl bilden.
7) Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.
8) Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre drei letzten Ziffern Nullen sind oder eine durch 8 teilbare Zahl bilden.
9) Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
10) Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz der Quersummen ihrer geradstelligen und ungeradstelligen Ziffern 0 oder durch 11 teilbar ist.

11) Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn ihre beiden letzten Ziffern Nullen sind oder eine durch 25 teilbare Zahl bilden.

(Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist; durch 15, wenn sie durch 3 und 5 teilbar ist; u. s. w.).

12) Der größte gemeinsame Teiler von zwei (oder mehr) Zahlen ist die größte Zahl, die in jeder von ihnen ohne Rest aufgeht.

Relative Primzahlen sind Zahlen, die keinen gemeinsamen Teiler haben.

Das Aufsuchen des größten gemeinsamen Teilers geschieht (I) durch Zerlegung in Primfaktoren.

Beispiel. $6552 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \quad (= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13)$
$14112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \quad (= 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2)$

Der größte gemeinsame Teiler von 6552 und 14112 ist daher
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \; (= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7) = 504.$

(II) bei zwei Zahlen durch wiederholte Division. (Kettendivision.)

Beispiel.

$7453 : 2407 = 3$
7221
$2407 : 232 = 10$
2320
$232 : 87 = 2$
174
$87 : 58 = 1$
58
$58 : 29 = 2$

oder

$7453 : 2407 = 3$
$2407 : 232 = 10$
$232 : 87 = 2$
$87 : 58 = 1$
$58 : 29 = 2$
0

oder

	7453	2407	3
	7221	2320	
10	232	87	2
	174	58	
1	58	29	2
	58		
	0		

Der größte gemeinsame Teiler von 7453 und 2407 ist 29.

13) Das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei (oder mehr) Zahlen ist die kleinste Zahl, die durch jede von ihnen ohne Rest teilbar ist.

Das Aufsuchen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von mehreren Zahlen geschieht durch Zerlegung in Primfaktoren.

Beispiel. Welches ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 15, 40, 45, 72, 80?

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \qquad (= 3^2 \cdot 5)$
$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \; (= 2^3 \cdot 3^2)$
$80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \; (= 2^4 \cdot 5)$.

Das kleinste gemeinsame Vielfache von (15, 40), 45, 72, 80 ist $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \; (= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) = \underline{720}$.

§ 3. Von den Brüchen.

1) Teilt man ein Ganzes in gleiche Teile, so wird jeder dieser Teile oder eine Anzahl derselben **Bruch** genannt.

Der **Nenner** gibt an, in wieviel gleiche Teile das Ganze geteilt ist; der **Zähler** gibt an, aus wieviel solchen Teilen der Bruch besteht. Also bedeutet $\frac{3}{5}$ m den fünften Teil von 1 m dreimal genommen, oder auch den fünften Teil von 3 m.

Der **reziproke Wert eines Bruches** ist ein zweiter Bruch, dessen Zähler gleich dem Nenner des ersten und dessen Nenner gleich dem Zähler des ersten ist.

2) Ein **echter Bruch** ist ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner; ein **unechter Bruch** ist ein Bruch, dessen Zähler größer ist als der Nenner.

Ein echter Bruch ist kleiner als ein Ganzes, ein unechter Bruch ist größer als ein Ganzes.

3) **Gemischte Zahlen** sind Summen, die aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche bestehen (z. B. $4\frac{3}{4} = 4 + \frac{3}{4}$).

Jede gemischte Zahl läßt sich in einen unechten Bruch verwandeln, (einrichten) und umgekehrt.

4) Brüche mit gleichen Nennern heißen **gleichnamig**, Brüche mit verschiedenen Nennern heißen **ungleichnamig**.

5) Gleichnamige Brüche werden addiert [subtrahiert], indem man die Zähler addiert [subtrahiert] und den Nenner beibehält.

6) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und den Nenner beibehält (oder den Nenner durch die Zahl dividiert und den Zähler beibehält).

Eine gemischte Zahl wird multipliziert, indem man die ganze Zahl und den Bruch einzeln multipliziert und beide Produkte addiert.

7) Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Zähler beibehält und den Nenner mit der Zahl multipliziert (oder den Zähler durch die Zahl dividiert und den Nenner beibehält).

Gemischte Zahlen werden vor der Division in unechte Brüche verwandelt. (Ist die ganze Zahl und der Zähler des Bruches durch den Divisor teilbar, so kann man sie auch einzeln dividieren.)

8) Ein Bruch wird **erweitert**, indem man den Zähler und den Nenner mit derselben Zahl multipliziert. — Ein Bruch wird **gehoben**, indem man den Zähler und den Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.

Durch Erweitern und Heben wird nur die Form, aber nicht der Wert des Bruches geändert.

9) Ungleichnamige Brüche werden addiert [subtrahiert], indem man sie auf den Hauptnenner bringt und die erhaltenen gleichnamigen Brüche addiert [subtrahiert].

Der **Hauptnenner** ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller einzelnen Nenner (§ 2, 13).

10) Mit einem Bruche wird multipliziert, indem man mit dem Zähler multipliziert und durch den Nenner dividiert.

11) Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner multipliziert.

12) Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit dem Nenner multipliziert und durch den Zähler dividiert (oder mit seinem reziproken Werte multipliziert).

§ 4. Von den Dezimalbrüchen.

1) Aus der Einheit entstehen bei wiederholter Multiplikation mit 10 die **dekadischen Einheiten** (10, 100, 1000 u. s. w.), bei wiederholter Division durch 10 die **dezimalen Einheiten** (0,1, 0,01, 0,001 u. s. w.).

Die dekadischen Einheiten sind die aufeinanderfolgenden Potenzen von 10:

$10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10\,000 = 10^4$ u. s. w.

2) Ein **Dezimalbruch** ist ein Bruch, dessen Nenner eine dekadische Einheit (oder eine Potenz von 10) ist. — Ein Dezimalbruch läßt sich auch als eine Summe von Brüchen betrachten, deren Nenner aufeinanderfolgende dekadische Einheiten (oder Potenzen von 10) sind:

$$\text{z. B. } 0{,}5074 = \frac{5074}{10\,000} \text{ od. } \frac{5}{10} + \frac{7}{1000} + \frac{4}{10\,000}$$

$$\left(= \frac{5}{10^1} + \frac{7}{10^3} + \frac{4}{10^4}\right).$$

3) Ein Bruch, dessen Nenner keine anderen Primfaktoren als 2 und 5 enthält, kann in einen Dezimalbruch verwandelt werden, indem man ihn so erweitert, daß der Nenner eine dekadische Einheit (oder eine Potenz von 10) wird.

4) Ein (endlicher) Dezimalbruch ist gleich einem gemeinen Bruche, dessen Zähler die aus den Ziffern des Dezimalbruches gebildete Zahl und dessen Nenner eine dekadische Einheit mit soviel Nullen ist, wie Ziffern hinter dem Komma stehen.

5) Dezimalbrüche werden addiert [subtrahiert], indem man sie so untereinander stellt, daß Komma unter Komma steht, und sie dann wie ganze Zahlen addiert [subtrahiert].

6) Dezimalbrüche werden mit einer dekadischen Einheit multipliziert [dividiert], indem man das Komma um soviel Stellen nach rechts [links] rückt, wie die dekadische Einheit Nullen hat.

7) Dezimalbrüche werden miteinander multipliziert, indem man sie wie ganze Zahlen multipliziert und im Produkt so viele Dezimalstellen (von rechts) abstreicht, wie in den Faktoren zusammen enthalten sind.

8) Bei der Division durch einen Dezimalbruch multipliziert man den Dividendus und den Divisor mit derjenigen dekadischen Einheit, die den Divisor zu einer ganzen Zahl macht, und führt dann die Division aus.

9) Jeder gemeine Bruch kann in einen Dezimalbruch verwandelt werden, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.

Nur solche (vollständig gehobene) Brüche, deren Nenner keine anderen Primfaktoren als 2 und 5 enthalten, liefern endliche Dezimalbrüche; enthält dagegen der Nenner andere Primfaktoren, so entsteht ein periodischer und zwar ein rein- oder ein unrein-(gemischt-)periodischer Dezimalbruch.

10) Verwandlung periodischer Dezimalbrüche in gemeine Brüche.

Beispiele.

a) $x = 0{,}\overline{225}225\ldots$

$1000x = 225{,}225\ldots$

$1x = \quad 0{,}225\ldots$

$999x = 225$

$$x = \frac{225}{999} = \frac{25}{111}.$$

b) $x = 0{,}3\overline{228}228\ldots$

$10000x = 3228{,}228\ldots$

$10x = \quad 3{,}228\ldots$

$9990x = 3225$

$$x = \frac{3225}{9990} = \frac{215}{666}.$$

Abgekürzte Multiplikation und Division.

Bezeichnet man mit M, HT, ZT, T, H, Z, E, z, h, t, zt, ht, m . . . die dekadischen und dezimalen Einheiten Million . . . Einer, Zehntel . . . Milliontel u. s. w., so bedeutet die Angabe (z) hinter einer Aufgabe, daß bis auf ein Zehntel genau gerechnet werden soll, d. h. daß der Fehler kleiner als ein halbes Zehntel sein soll.

Beispiele für die Multiplikation.

1) 33,4562·42,78 (z) 2) 0,04567·0,03784 (zt).

Man verwandelt die Aufgabe durch Multiplikation des einen und Division des andern Faktors mit derselben dekadischen Einheit derart, daß der Multiplikator mit Einern beginnt:

334,562·4,278 0,0004567·3,784.

Man behält dann im Multiplikandus nur eine Stelle mehr bei, als im Produkte verlangt werden, und multipliziert zuerst mit den Einern des Multiplikators; streicht darauf diese und die letzte Stelle des Multiplikandus u. s. f., indem man beim Multiplizieren auch die vorher gestrichene Zahl noch berücksichtigt:

33~~4~~,~~56~~|~~2~~·~~4~~,~~278~~	0,000~~45~~|~~67~~·~~3~~,~~7~~84
1338,25	0,00137
66,91	32
23,42	3
2,67	0,0017(2)
1431,2(5)	
Ergebnis: 1431,3.	Ergebnis: 0,0017.

Beispiele für die Division.

1) 25,3416 : 13,472 (h) 2) 0,00172 : 0,03784 (t).

Man macht zuerst den Divisor zu einer ganzen Zahl:

25 341,6 : 13472 172 : 3784.

Darauf entscheidet man über die Stellung des Kommas im Quotienten und die Anzahl der Ziffern desselben (eine Dezimalstelle mehr als verlangt ist), indem man die von Null abweichenden Ziffern durch Punkte andeutet:

25341,6 : 13472 = . , . . . 172 : 3784 = 0,0 . . .

Man läßt nun dem Divisor nur soviel Ziffern, wie Punkte im Quotienten stehen, und gibt dem Dividendus durch Streichen von Ziffern (oder Zufügung von Nullen) soviel Ziffern, daß die Division einmal ausführbar wird; nach der ersten Division streicht man die letzte Ziffer des Divisors u. s. f., indem man die letztgestrichene Ziffer bei der Multiplikation immer noch mitberücksichtigt:

2534|1,6 : 1~~347~~|~~2~~ = 1,88 (1)	1720 : 3~~78~~|~~4~~ = 0,045 (4)
1347	1514
1187	206
1078	189
109	17
107	15
2	
Ergebnis: 1,88	Ergebnis: 0,045.

§ 5. Maße und Gewichte.

a) Längenmaße.

Einheit der Längenmaße (Längeneinheit, Maßeinheit der Längengrößen, vgl. § 33, 4) ist das Meter. Das Meter (m) ist nahezu dem vierzigmillionten Teile des Erdmeridians gleich. Ferner sind gebräuchlich von höheren (dekadischen) Längenmaßen: das Kilometer (km)

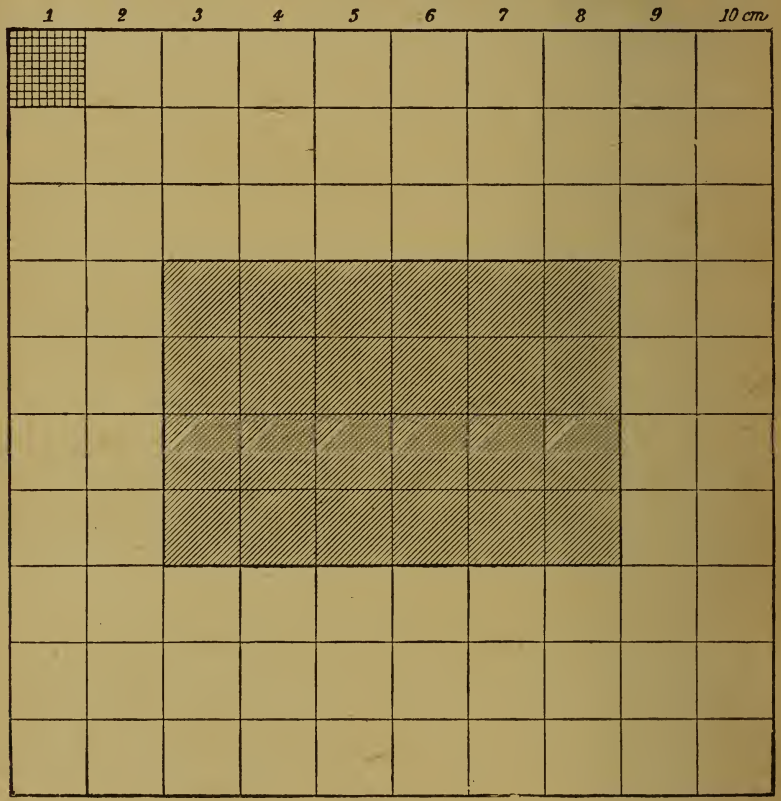


Fig. 1.

von niederen (dezimalen): das Dezimeter (dm), das Zentimeter (cm) und das Millimeter (mm).

1 km = 1000 m.

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.

Die obere Seite der Fig. 1 zeigt ein Dezimeter, geteilt in 10 cm; das erste Zentimeter ist geteilt in 10 mm.

b) Flächenmaße.

Einheit der Flächenmaße (Flächeneinheit, Maßeinheit der Flächengrößen, vgl. § 33, 4) ist das **Quadratmeter**. Das Quadratmeter (qm) ist ein Quadrat mit 1 m langer Seite. Ein Quadrat ist ein Viereck mit gleichen Seiten und rechten Winkeln. Von Flächenmaßen sind gebräuchlich: das Quadratkilometer (qkm), Hektar (ha), Ar (a), Quadratmeter (qm), Quadratdezimeter (qdm), Quadratzentimeter (qcm) und Quadratmillimeter (qmm). Ein Hektar [Ar] ist ein Quadrat von 100 [10] m Seitenlänge.

1 qm = 10 000 qcm = 1 000 000 qmm.

1 qm = 0,01 a = 0,0001 ha = 0,000 001 qkm.

1 a = 100 qm; 1 ha = 100 a; 1 qkm = 100 ha.

Fig. 1 zeigt die Größe eines Quadratdezimeters, Quadratzentimeters, Quadratmillimeters.

Ein Rechteck ist ein Viereck mit rechten Winkeln. Die Fläche eines Rechtecks wird berechnet, indem man die Maßzahlen (vgl. § 6, 7) seiner Länge und Breite miteinander multipliziert. So hat das schraffierte Rechteck in Fig. 1 eine Länge von 6 cm und eine Breite von 4 cm, also 24 qcm Flächeninhalt (vgl. § 7, 5).

c) Körpermaße (Hohlmaße).

Einheit der Körpermaße (Kubikeinheit, Maßeinheit der Körpergrößen) ist das **Kubikmeter**. Das Kubikmeter (cbm) ist ein Würfel mit 1 m langer Kante. Ein Würfel ist ein von sechs Quadraten begrenzter Teil des Raumes (Fig. 2 c). Von Körpermaßen sind gebräuchlich: das Kubikmeter (cbm), Hektoliter (hl), Liter (l), Kubikdezimeter (cdm), Kubikzentimeter (ccm), Kubikmillimeter (cmm).

1 l = 1 cdm.

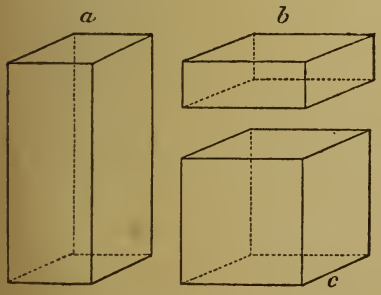


Fig. 2.

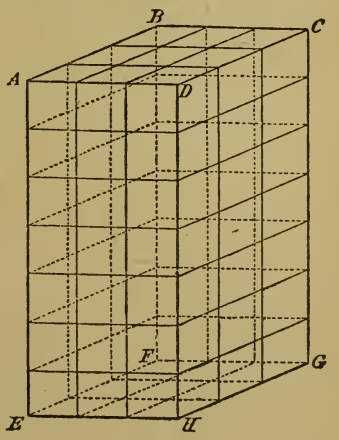


Fig. 3.

1 cbm = 1 000 000 ccm = 1 000 000 000 cmm.

1 cbm = 1000 l = 10 hl; 1 hl = 100 l; 1 l = 1000 ccm.

Ein Quader ist ein von sechs Rechtecken begrenzter Teil des Raumes (Fig. 2 a und b). Der Rauminhalt (vgl. § 7, 5) eines Quaders wird berechnet, indem man die Maßzahlen (vgl. § 6, 7) seiner Länge, Breite und Höhe miteinander multipliziert. So hat der in Fig. 3 dargestellte Quader die Länge von 3, die Breite von 3 und die Höhe von 7 Längeneinheiten, also 63 Kubikeinheiten Rauminhalt.

d) Gewichte.

Einheit der Gewichtsmaße (Gewichtseinheit, Maßeinheit der Gewichtsgrößen) ist das Gramm. Das Gramm (g) ist das Gewicht eines Kubikzentimeters destillierten Wassers bei + 4° C. (4 Zentigrad). Von Gewichtsmaßen sind gebräuchlich: die Tonne (t), das Kilogramm (kg), das Gramm (g), das Milligramm (mg). Das Kilogramm ist das Gewicht eines Kubikdezimeters (Liters) destillierten Wassers bei + 4° C. (4 Zentigrad).

1 t = 1000 kg = 1 000 000 g.

1 kg = 1000 g = 1 000 000 mg = 0,001 t.

Daneben benutzt man auch das Dekagramm (Dg), das Dezigramm (dg), das Zentigramm (cg); ferner auch den Doppelzentner (dz).

1 Dg = 10 g = 100 dg = 1000 cg.

1 dz = 100 kg.

B. Mathematik.

§ 6. Von den Größen.

1) Die **Mathematik** ist die Lehre von den Größen.

2) **Erklärung.** Eine Größe ist ein Ganzes, das man sich aus gleichartigen Teilen zusammengesetzt denken kann, ohne daß es auf die Anordnung der Teile ankommt.

Eine Größe ändert sich durch Vermehrung oder Verminderung nicht in ihrem Wesen.

Größen sind z. B. Strecken, Flächen, Körperinhalte, Winkel; Gewichte; Geldsummen; Geschwindigkeiten; Pferdestärken u. s. w.

Auch die unbenannten Zahlen sind als Größen zu betrachten.

Größen werden in der Regel durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet.

3) Zwei (gleichartige) Größen sind entweder einander **gleich** ($a = b$) oder **ungleich**; in diesem Falle ist entweder **a größer als b** ($a > b$) oder **a kleiner als b** ($a < b$).

4) **Erklärung.** (Gleichartige) Größen **addieren** heißt eine neue Größe bilden, deren Teile die gegebenen Größen sind.

Das Zusammenzählen (§ 1, 1) ist nur eine besondere Art des Addierens (vgl. z. B. § 8, 4 und § 9, 5).

5) **Erklärung.** Von einer Größe a eine Größe b (derselben Art) **subtrahieren** heißt einen Summanden suchen, zu dem man b addieren muß, um a als Summe zu erhalten.

Ausführung z. B. in § 8, 4 und § 9, 5.

6) **Erklärung.** Eine Größe a mit einer Zahl n **multiplizieren** heißt eine Summe von n Summanden bilden, deren jeder a ist; z. B.

$$a \cdot 5 = a + a + a + a + a.$$

7) a. **Erklärung.** Eine Größe a durch eine Zahl n **dividieren** heißt die Größe b suchen, die mit n multipliziert a gibt (erste Art der Division: das Teilen).

Ausführung z. B. in § 17, 2 und 3, § 31, 4 und 5.

b. Erklärung. Eine Größe a durch eine Größe b (derselben Art) dividieren heißt die Zahl n suchen, mit der man b multiplizieren muß, um a zu erhalten (zweite Art der Division: das Messen).

Ist b die **Maßeinheit** der betreffenden Größenart, so heißt die gefundene Zahl **Maßzahl** der Größe a.

Mathematische Grundsätze.

8) Ein mathematischer Grundsatz (Axiom) ist eine an sich einleuchtende (durch unmittelbare Anschauung gewonnene) Wahrheit, die keines Beweises bedarf. Ein Lehrsatz (Theorem) ist ein Ausspruch, der bewiesen werden muß.

Die wichtigsten mathematischen Grundsätze sind:

9) Jede Größe ist sich selbst gleich ($a = a$). I.

10) Jede Größe ist gleich der Summe aller ihrer Teile. II.

Der Teil ist kleiner als das Ganze.

Das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

11) Gleiche Größen darf man füreinander setzen. III.

12) Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie untereinander gleich. IV.

$$\begin{gathered} \text{Ist } a = c \\ \text{und } b = c, \\ \text{so folgt } a = b. \end{gathered}$$

12a) Ist eine Größe größer [kleiner] als eine von zwei gleichen Größen, so ist sie auch größer [kleiner] als die andere.

$$\begin{gathered} \text{Ist } a > b \\ \text{und } b = c, \\ \text{so folgt } a > c. \end{gathered} \qquad \begin{gathered} \text{Ist } a < b \\ \text{und } b = c, \\ \text{so folgt } a < c. \end{gathered}$$

12b) Ist eine Größe größer als eine zweite und diese größer als eine dritte, so ist auch die erste größer als die dritte.

$$\begin{gathered} \text{Ist } a > b \\ \text{und } b > c, \\ \text{so folgt } a > c. \end{gathered}$$

13) Gleiches zu Gleichem addiert gibt gleiche Summen. V.

$$\begin{gathered} \text{Ist } a = b \\ \text{und } c = d, \\ \text{so folgt } a + c = b + d. \end{gathered}$$

14) Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt gleiche Differenzen. VI.

$$\begin{gathered} \text{Ist } a = b \\ \text{und } c = d, \\ \text{so folgt } a - c = b - d. \end{gathered}$$

15) Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt gleiche Produkte. VII.

Ist $a = b$
und $c = d$,
so folgt $a \cdot c = b \cdot d$.

16) Gleiches durch Gleiches dividiert gibt gleiche Quotienten. VIII.

Ist $a = b$
und $c = d$,
so folgt $a : c = b : d$.

17) **Anmerkung.** Die Grundsätze 11—16 sollen ihrer häufigen Anwendung wegen immer in folgender abgekürzter Form angeführt werden: 11) Gl. Größen darf man . . . ., 12) Sind 2 Größen . . . ., 13) Gl. zu Gl. add. . . . ., 14) Gl. von Gl. subtr. . . . ., 15) Gl. mit Gl. mult. . . . ., 16) Gl. durch Gl. div. . . . .

Noch andere Grundsätze, die gleichfalls Anwendung finden werden, sind z. B.:

Gleiches zu Ungleichem addiert gibt ungleiche Summen (Gl. zu Ungl. add. . . . .).

Ist $a > b$
und $c = d$,
so folgt $a + c > b + d$.

Gleiches von Ungleichem subtrahiert gibt ungleiche Differenzen (Gl. von Ungl. subtr. . . . .), und zwar gibt der größere Minuendus die größere Differenz.

Ist $a > b$ und $c = d$, so folgt $a - c > b - d$.

oder

Ist $a < b$ und $c = d$, so folgt $a - c < b - d$.

Ungleiches von Gleichem subtrahiert gibt ungleiche Differenzen (Ungl. von Gl. subtr. . . . .), und zwar gibt der größere Subtrahendus die kleinere Differenz.

Ist $a = b$ und $c > d$, so folgt $a - c < b - d$.

oder

Ist $a = b$ und $c < d$, so folgt $a - c > b - d$.

Ist eine Größe größer als eine zweite und ist eine dritte Größe größer als eine vierte, so ist auch die Summe der ersten und dritten größer als die Summe der zweiten und vierten.

Ist $a > b$
und $c > d$,
so folgt $a + c > b + d$.

§ 7. Von den Raumgrößen.

1) Die Geometrie ist die Lehre von den Raumgebilden und insbesondere von den Raumgrößen.

2) Es gibt vier Arten von **Raumgebilden: Körper, Flächen, Linien, Punkte.**

Raumgebilde sind auch die Winkel (vgl. § 9).

3) **Erklärungen.** Ein (mathematischer, geometrischer) **Körper** ist ein allseitig begrenzter Teil des Raumes. Eine **Fläche** ist die Grenze eines Körpers. Eine **Linie** ist die Grenze einer Fläche. Ein **Punkt** ist die Grenze einer Linie.

4) Durch Bewegung eines Punktes entsteht eine Linie, durch Bewegung einer Linie (in der Regel) eine Fläche, durch Bewegung einer Fläche (in der Regel) ein Körper.

In besonderen Fällen kann durch Bewegung einer Linie wieder eine Linie, durch Bewegung einer Fläche wieder eine Fläche entstehen.

5) Ein Punkt hat **keine** Ausdehnung (Dimension).

Er kann also auch nicht aus Teilen zusammengesetzt gedacht werden, ist daher auch (§ 6, 2) keine Größe.

Eine Linie hat **nur eine** Ausdehnung: die Länge.

Eine Fläche hat **zwei** Ausdehnungen: Länge und Breite.

Ein Körper hat **drei** Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe (Dicke, Tiefe).

Linien, Flächen, Körper haben eine bestimmte Größe (Länge, Flächeninhalt, Rauminhalt oder Volumen).

Als Maß für die Länge von Linien dient das Meter (m) oder Zentimeter (cm).
Als Maß für den Inhalt von Flächen (Flächeninhalt) dient das Quadratmeter (qm) oder das Quadratzentimeter (qcm).
Als Maß für den Rauminhalt von Körpern dient das Kubikmeter (cbm) oder das Kubikzentimeter (ccm).
vgl. § 5.

6) Es gibt gerade und krumme Linien.

7) **Grundsatz.** Zwischen zwei Punkten gibt es **nur eine gerade Linie.**

Die gerade Linie (oder die Gerade) gibt **den kürzesten Weg** zwischen zwei Punkten an.

Bewegt sich ein Punkt in einer geraden Linie, so sagt man, er habe die **Richtung seiner Bewegung** nicht geändert.

8) **Erklärung.** Eine **krumme** Linie heißt eine Linie, die in keinem ihrer kleinsten Teile gerade ist.

Krumme Linien werden auch **Kurven** genannt (z. B. Kreis, Ellipse).

Eine **gebrochene** Linie ist eine Linie, die zwar nicht gerade ist, wohl aber aus geraden Teilen besteht.

9) Es gibt ebene und krumme Flächen.

10) **Erklärung.** Eine Fläche heißt **eben** (eine **Ebene**), wenn sie jede Gerade, die durch zwei ihrer Punkte geht, vollständig in sich aufnimmt.

11) **Erklärung.** Eine Fläche heißt **krumm**, wenn sie in keinem ihrer kleinsten Teile eben ist (Zylinder, Kegel, Kugel).

12) Die Lehre von denjenigen Gebilden, die ganz in einer Ebene liegen, heißt **ebene Geometrie** oder **Planimetrie**; die Lehre von den Gebilden im Raume heißt **körperliche Geometrie** oder **Stereometrie**.

I. Planimetrie.

Erster Abschnitt. Gerade, Strecken, Winkel, Figuren.

§ 8. Von den Strecken.

1) **Erklärungen.** Eine gerade Linie heißt **Gerade**, solange sie unbegrenzt gedacht wird.

Das Instrument zum Zeichnen einer Geraden ist das **Lineal**.

Ein durch zwei Punkte begrenzter Teil einer Geraden heißt **Strecke**.

Die Strecke heißt auch **Abstand** oder **Entfernung** der beiden sie begrenzenden Punkte.

2) Man bezeichnet einen Punkt in der Regel durch einen beigesetzten großen lateinischen Buchstaben.

Man bezeichnet eine Gerade durch die beiden Buchstaben von zwei beliebigen Punkten, die auf ihr liegen.

Die in Fig. 4 dargestellte Gerade kann also AB, AC oder BC genannt werden.

Man bezeichnet eine Strecke durch die beiden Buchstaben, die an ihren Endpunkten stehen; ihre Länge bezeichnet man durch einen kleinen lateinischen Buchstaben.

So ist in Fig. 4 die Strecke AB auch s, die Strecke BC auch t genannt. AB ist auch der Abstand oder die Entfernung der beiden Punkte A und B.

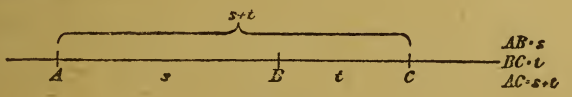


Fig. 4.

3) Zwei Strecken heißen **gleich**, wenn man sie so aufeinander legen kann, daß sie sich decken.

Zur Feststellung der Gleichheit von Strecken benutzt man gewöhnlich den Zirkel oder einen Maßstab.

4) Zwei Strecken werden **addiert**, indem man sie auf derselben Geraden nacheinander abträgt (Fig. 4).

Eine Strecke wird von einer anderen **subtrahiert**, indem man auf einer Geraden von einem Punkte aus zuerst die eine Strecke abträgt, dann auf dieser von ihrem Endpunkt aus in entgegengesetzter Richtung die andere (Fig. 5).

Division einer Strecke durch 2 (Halbieren) s. § 17, 2, durch eine andere Zahl s. § 31, 4.

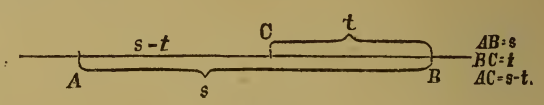


Fig. 5.

5) Dreht man eine Strecke (MA in Fig. 6) um einen ihrer Endpunkte in einer Ebene herum, bis sie wieder in ihre Anfangslage zurückkehrt, so beschreibt sie eine **Kreisfläche**, ihr sich bewegender Endpunkt beschreibt einen **Kreis (Kreislinie, Peripherie)**. Die sich drehende Strecke heißt **Halbmesser** oder **Radius** des Kreises ($MA = MB = MC = r$), der doppelte Halbmesser heißt **Durchmesser** ($AC = 2r$), der feste Endpunkt **Mittelpunkt** oder **Zentrum** des Kreises (M). Schneidet eine Gerade den Kreis, so heißt sie **Sekante**, ihr Abschnitt im Kreise heißt **Sehne**; zu jeder (nicht durch den Mittelpunkt gehenden) Sehne gehört ein kleinerer und ein größerer **Kreisbogen oder Bogen**.

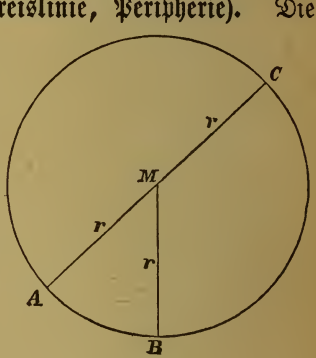


Fig. 6.

6) **Erklärung.** Der Kreis ist eine krumme Linie, deren Punkte sämtlich in einer Ebene liegen und von einem festen Punkte in ihr gleich weit entfernt sind.

Das Instrument zum Zeichnen eines Kreises ist der **Zirkel**.

Die übrigen Punkte der Ebene haben vom Mittelpunkte einen kleineren oder größeren Abstand, als der Kreisradius ist, je nachdem sie innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen.

§ 9. Von den Winkeln.

1) **Grundsatz.** Zwei Gerade können nur **einen** Punkt gemeinsam haben; sie **schneiden** einander in diesem Punkte (**Schnittpunkt**).

2) **Erklärungen.** Zwei Gerade, die von einem Punkte ausgehen, bilden einen **Winkel** (∠). Die beiden Geraden heißen Schenkel, ihr Schnittpunkt heißt Scheitel (oder Scheitelpunkt) des Winkels. Der Winkel (Fig. 7), dessen Scheitel A ist, und dessen Schenkel AB und AC sind, wird ∠ BAC oder ∠ CAB genannt (wobei also der Scheitelpunkt stets in die Mitte zu setzen ist); seine Größe wird auch durch einen zwischen die Schenkel gesetzten kleinen griechischen Buchstaben (α) bezeichnet.

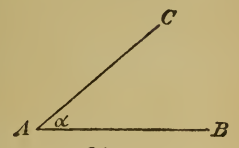


Fig. 7.

Durch die **Drehung** einer Geraden entsteht ein Winkel. Der Winkel CAB (Fig. 7) ist das Maß der Drehung der Geraden AC gegen die Gerade AB.

3) Zwei Winkel heißen gleich, wenn man sie so aufeinander legen kann, daß ihre Schenkel sich decken.

Dabei kommt es nur darauf an, daß die Richtungen der Schenkel sich decken. Die Größe eines Winkels ist unabhängig von der Länge seiner Schenkel (denn diese sind Gerade und nicht Strecken).

4) Um die Größe eines Winkels messen und durch eine Maßzahl angeben zu können, beschreibt man um den Scheitel einen Kreis (Fig. 8)

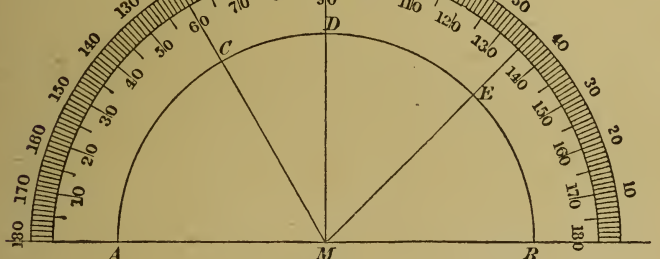


Fig. 8.

und teilt seine Peripherie in 360 gleiche Teile, die man Bogengrade (°) nennt. Verbindet man die Teilpunkte mit dem Scheitel, so wird auch der Winkel in gleiche Teile geteilt. Er hat dann ebenso viele Winkelgrade (°), als der zwischen seinen Schenkeln liegende Bogen Bogengrade hat. In Fig. 8 ist:

∠ AMC (= CMA) = 60° ∠ AME (= EMA) = 135°
∠ AMD (= DMA) = 90° ∠ BME (= EMB) = 45°
∠ BMD (= DMB) = 90° ∠ BMC (= CMB) = 120°
∠ AMB (= BMA) = 180°.

Für genauere Angaben teilt man noch den Grad in 60 Minuten (′), die Minute in 60 Sekunden (″), oder man teilt auch den Grad dezimal ein. So ist z. B. $12{,}4^\circ = 12^\circ 24'$, $12{,}75^\circ = 12^\circ 45'$ u. s. f.

Ein nach Fig. 8 konstruiertes Instrument zum Messen und Antragen von Winkeln wird **Transporteur** genannt.

5) **Zwei Winkel werden addiert,** indem man in einem Punkte an eine Gerade zuerst den einen Winkel, und an dessen freien Schenkel in demselben Punkte den zweiten Winkel anträgt (Fig. 9).

Ein Winkel wird von einem anderen **subtrahiert,** indem man in demselben Punkte an dieselbe Gerade nach derselben Seite zuerst den einen und dann den anderen anträgt (Fig. 10).

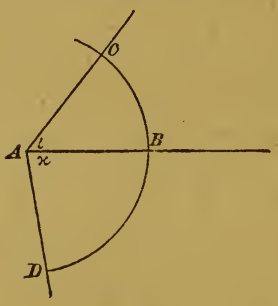


Fig. 9.

$\angle BAC = \iota$
$\angle BAD = \varkappa$
$\angle CAD = \iota + \varkappa.$

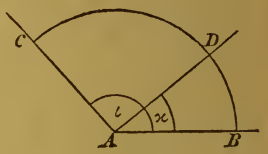


Fig. 10.

$\angle BAC = \iota$
$\angle BAD = \varkappa$
$\angle CAD = \iota - \varkappa.$

Das Antragen der Winkel geschieht zunächst mit dem Transporteur; über die Ausführung mit dem Lineal und Zirkel s. § 17, 7.

Über die Division eines Winkels durch 2 (Halbieren eines Winkels) s. § 17, 3.

6) **Erklärungen. Ein gestreckter Winkel** heißt ein Winkel, dessen Schenkel in die entgegengesetzten Richtungen einer Geraden fallen ($\angle AMB$ oder $\angle BMA$ in Fig. 8).

Alle gestreckten Winkel sind einander gleich (180°).

Ein rechter Winkel oder ein **Rechter** (R) heißt die Hälfte eines gestreckten Winkels.

Alle Rechten sind einander gleich (90°). Ein gestreckter Winkel ist gleich 2 R.

Alle Winkel um einen Punkt der Ebene betragen zusammen 4 R (oder 360°).

7) **Zwei Gerade stehen aufeinander senkrecht** ($\perp$) (oder jede von ihnen ist ein Lot auf der anderen), wenn sie einen rechten Winkel bilden.

(In Fig. 8 ist $MD \perp MA$ oder auch $MA \perp MD$.)

8) **Erklärungen.** Ein spitzer Winkel ist kleiner als ein Rechter (Fig. 11). Ein stumpfer Winkel ist größer als ein Rechter, aber kleiner als ein gestreckter (Fig. 12).

Fig. 11.

Fig. 12.

Spitze und stumpfe Winkel heißen auch **hohle** (konkave) Winkel. Ein **überstumpfer** (konvexer) Winkel ist größer als ein gestreckter (Fig. 13).

Hohle und überstumpfe Winkel heißen, im Gegensatze zum Rechten, auch **schiefe Winkel.**

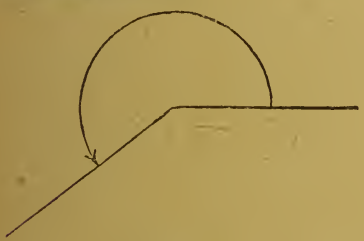


Fig. 13.

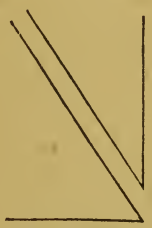


Fig. 14.

9) Ein Winkel heißt das **Komplement** eines anderen (oder: **Komplementwinkel** heißen zwei Winkel), wenn ihre Summe einen Rechten beträgt (Fig. 14).

Fig. 15.

Ein Winkel heißt das **Supplement** eines anderen (oder: **Supplementwinkel** heißen zwei Winkel), wenn ihre Summe zwei Rechte beträgt (Fig. 15).

§ 10. Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

1) Wenn zwei Gerade einander schneiden, so entstehen vier Winkel. Diese heißen paarweise Nebenwinkel oder Scheitelwinkel.

2) **Erklärung.** **Nebenwinkel** heißen zwei Winkel, wenn sie den Scheitel und den einen Schenkel gemeinsam haben, und wenn ihre nicht gemeinsamen Schenkel in die entgegengesetzten Richtungen einer Geraden fallen.

Demnach beträgt die Summe zweier Nebenwinkel zwei Rechte: $\angle BAD + \angle DAC = 2\ R$ (Fig. 16).

Folgerungen. Sind Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein Rechter. Sind Nebenwinkel ungleich, so ist der eine spitz, der andere stumpf.

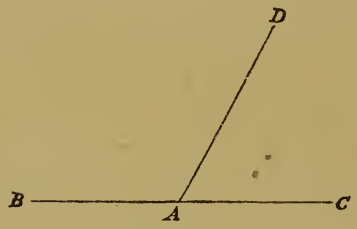


Fig. 16.

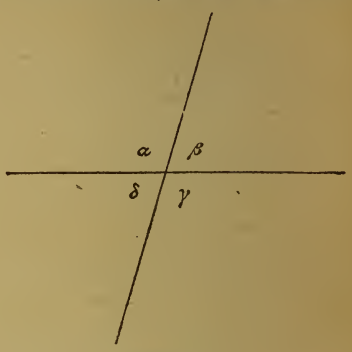


Fig. 17.

3) **Erklärung.** **Scheitelwinkel** heißen zwei Winkel, wenn die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind.

4) **Lehrsatz.** Scheitelwinkel sind einander gleich.

Voraussetzung. α und γ sind Scheitelwinkel (Fig. 17).

Behauptung. $\alpha = \gamma$.

Beweis. $\alpha + \beta = 2\ R$ (nach 2),

$\gamma + \beta = 2\ R$ (nach 2),

folglich ist $\alpha + \beta = \gamma + \beta$ (Sind 2 Größen . . . .);

nun ist $\beta = \beta$ (Jede Größe ist sich selbst gleich),

also ist auch $\alpha = \gamma$ (Gl. von Gl. subtr. . . .).

5) Weitere Lehrsätze.

a) Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Nebenwinkel.

b) Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Scheitelwinkel.

c) Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen aufeinander senkrecht.

d) Die Halbierungslinien zweier Scheitelwinkel bilden eine gerade Linie.

e) Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Komplement- und gleiche Supplementwinkel.

§ 11. Gegenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzte Winkel.

1) Wenn drei Gerade in der Ebene einander schneiden, so bilden sie miteinander zwölf Winkel.

2) Werden zwei von diesen Geraden nicht bis zu ihrem Schnittpunkte verlängert, so entstehen nur acht Winkel. Diese heißen paarweise Gegenwinkel, Wechselwinkel, entgegengesetzte Winkel. In Fig. 18 sind

Gegenwinkel:	α	und	ι,	β	und	$\varkappa$,
	γ	„	λ,	δ	„	μ;
Wechselwinkel:	α	„	λ,	β	„	μ,
	γ	„	ι,	δ	„	$\varkappa$,
entgegengesetzte Winkel:	α	„	μ,	β	„	λ,
	γ	„	$\varkappa$,	δ	„	ι.

Nennt man die vier Winkel α, β, λ, μ äußere und die vier Winkel γ, δ, ι, $\varkappa$ innere Winkel, so gelten die folgenden

Erklärungen. Gegenwinkel heißen ein äußerer und ein innerer an derselben Seite der schneidenden Geraden und an verschiedenen Scheitelpunkten.

Wechselwinkel heißen zwei äußere oder zwei innere an verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden und an verschiedenen Scheitelpunkten.

Entgegengesetzte Winkel heißen zwei äußere oder zwei innere an derselben Seite der schneidenden Geraden und an verschiedenen Scheitelpunkten.

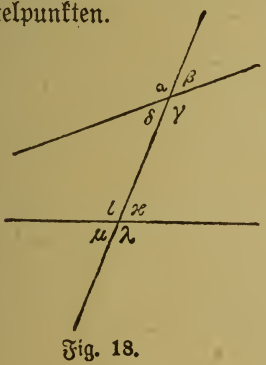


Fig. 18.

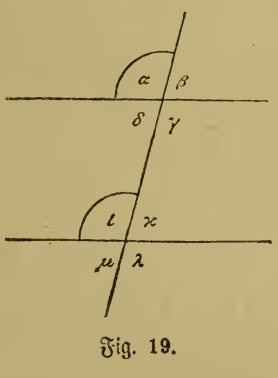


Fig. 19.

3) Lehrsatz. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß zwei Gegenwinkel einander gleich sind, so sind auch die übrigen Gegenwinkel gleich; ferner sind die Wechselwinkel gleich, und je zwei entgegengesetzte Winkel betragen zusammen zwei Rechte.
Vor. $\alpha = \iota$. (Fig. 19.)

Beh. I. $\beta = \varkappa$, $\gamma = \lambda$, $\delta = \mu$;
II. $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$, $\gamma = \iota$, $\delta = \varkappa$;
III. $\alpha + \mu = 2\,\mathrm{R}$, $\beta + \lambda = 2\,\mathrm{R}$, $\gamma + \varkappa = 2\,\mathrm{R}$, $\delta + \iota = 2\,\mathrm{R}$.

Bew. I. Weil $\alpha = \iota$ (Vor.),
ist $\beta = \varkappa$, $\delta = \mu$ (§ 10, 5a)
und $\gamma = \lambda$ (§ 10, 5b).

II. Weil $\alpha = \iota$ (Vor.),
$\iota = \lambda$ (§ 10, 4),
ist $\alpha = \lambda$ (Gl. Größen darf man ....).
Weil $\beta = \varkappa$ (Bew. I)
$\varkappa = \mu$ (§ 10, 4)
ist $\beta = \mu$ (Gl. Größen darf man ....).
Ebenso beweist man die übrigen Behauptungen II.

III. Weil $\alpha + \beta = 2\,\mathrm{R}$ (§ 10, 2),
$\beta = \mu$ (Bew. II),
ist $\alpha + \mu = 2\,\mathrm{R}$ (Gl. Größen darf man ....).
Ebenso beweist man die übrigen Behauptungen III.

4) Lehrsatz. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß zwei Wechselwinkel einander gleich sind, so sind auch die übrigen Wechselwinkel gleich; ferner sind die Gegenwinkel gleich, und je zwei entgegengesetzte Winkel betragen zusammen zwei Rechte.

Denn ist in Fig. 19 z. B. $\alpha = \lambda$, so folgt daraus sofort $\alpha = \iota$ und daraus alles übrige (nach 3, Lehrs.).

5) Lehrsatz. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte betragen, so betragen auch je zwei andere entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte, die Gegenwinkel sind gleich und die Wechselwinkel sind gleich.

Denn ist in Fig. 19 z. B. $\alpha + \mu = 2\,\mathrm{R}$, so ergiebt sich,
da auch $\iota + \mu = 2\,\mathrm{R}$ (Nebenwinkel),
daß $\alpha + \mu = \iota + \mu$ (Sind 2 Größen...).
Hieraus folgt aber $\alpha = \iota$ (Gl. von Gl. subtr....)
und daraus alles übrige (nach 3, Lehrs.).

§ 12. Von den Parallelen.

1) Erklärung. Zwei Gerade einer Ebene heißen parallel (||), wenn sie, beliebig weit verlängert, einander nicht schneiden.

2) Grundsätze. a) Verschiebt man eine Gerade in der Ebene so, daß sie sich nie um einen ihrer Punkte dreht, so ist sie in jeder Lage ihrer ursprünglichen Lage parallel.

b) Denkt man sich zwei einander schneidende Gerade fest miteinander verbunden, und verschiebt man dann die eine in sich selbst, so wird die andere parallel mit sich selbst verschoben.

3) **Praktische Anwendung beim Zeichnen.** Es soll mit Hilfe eines Lineals und eines Winkelmaßes (Zeichendreiecks, Winkelhakens) zu einer gegebenen Geraden durch einen außerhalb derselben gegebenen Punkt (P in Fig. 20) die Parallele gezogen werden.

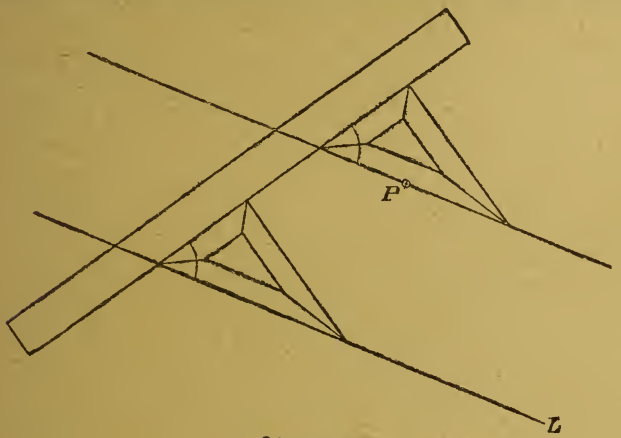


Fig. 20.

Man lege die eine Kante des Winkelmaßes auf die Gerade, lege das Lineal an eine andere Kante desselben, halte es fest und verschiebe dann das Winkelmaß längs des Lineals so weit, bis die erste Kante durch den gegebenen Punkt P geht.

Dann bestimmt diese Kante die gesuchte Parallele.

4) **Grundsatz.** Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann man zu dieser Geraden immer eine und nur eine Parallele ziehen.

5) Verfährt man nach 2) und 3), so bleiben die Winkel zwischen den Geraden ungeändert. Es gelten daher folgende

Lehrsätze. a) Gegenwinkel an Parallelen sind einander gleich.
b) Wechselwinkel an Parallelen sind einander gleich.
c) Entgegengesetzte Winkel an Parallelen betragen zusammen zwei Rechte.

6) **Erklärung.** Die **Umkehrung** eines geometrischen Lehrsatzes wird erhalten, indem man die Voraussetzung und die Behauptung vertauscht (oder bei mehreren Voraussetzungen und Behauptungen nur einen Teil derselben miteinander vertauscht).

Bemerkung. Der Beweis für eine Behauptung kann indirekt geführt werden, indem man nachweist, daß die entgegengesetzte Behauptung (oder die entgegengesetzten Behauptungen) zu Folgerungen führt, die mit der Voraussetzung in Widerspruch stehen. **(Indirekter Beweis.)**

7) **Lehrsatz.** Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß Gegenwinkel oder Wechselwinkel einander gleich sind, oder entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte betragen, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

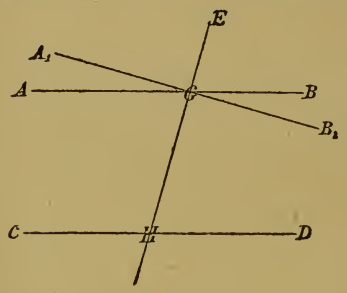


Fig. 21.

Vor. $\angle AGE = \angle CHG$ (Fig. 21).

Beh. $AB \parallel CD$.

Bew. (indirekt).

Nimmt man an, AB wäre nicht parallel CD, so könnte man durch G die Parallele A_1B_1 zu CD ziehen. Dann wäre

$\angle A_1GE = \angle CHG$ (nach 5, a),

$\angle AGE = \angle CHG$ (n. d. Vor.),

also müßte $\angle AGE = \angle A_1GE$ (Sind 2 Größen...) sein. Das ist aber nicht möglich, wenn nicht AG mit A_1G zusammenfällt. Also muß AB parallel CD sein.

Der Beweis wird in gleicher Weise geführt, wenn die zweite oder dritte Voraussetzung besteht.

Weitere Lehrsätze.

8) Die Halbierungslinien zweier Gegenwinkel oder zweier Wechselwinkel an Parallelen sind parallel.

9) Die Halbierungslinien zweier entgegengesetzter Winkel an Parallelen stehen aufeinander senkrecht.

Der Beweis kann mit Hilfe von § 10, 5c und § 12, 8 oder auch von § 14, 6 geführt werden.

10) Lote auf derselben Geraden sind parallel.

11) Steht eine Gerade auf einer von zwei Parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der anderen senkrecht.

12) Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

13) Winkel, deren Schenkel parallel und beide gleichgerichtet, oder parallel und beide entgegengesetzt gerichtet sind, sind einander gleich; sie betragen aber zusammen zwei Rechte, wenn das eine Schenkelpaar gleich-, das andere entgegengesetzt gerichtet ist.

§ 13. Von den ebenen Figuren.

1) Eine (ebene) **Figur** ist ein allseitig begrenzter Teil der Ebene.

Hierbei ist Figur im engeren Sinne genommen, während Figur im weiteren Sinne auch jede Zeichnung bedeutet.

2) Eine (ebene) Figur kann durch eine einzige krumme Linie begrenzt sein (z. B. der Kreis), oder durch mehrere krumme Linien, durch drei oder mehr gerade oder auch durch krumme und gerade Linien (z. B. der halbe Kreis oder Halbkreis, der Viertelkreis oder Quadrant).

3) Erklärung. **Umfang** einer Figur heißt die Länge der Grenzlinie oder die Summe der Längen aller Grenzlinien.

4) Erklärung. **Flächeninhalt** oder **Inhalt** einer Figur heißt die Größe des von ihrem Umfange begrenzten Teiles der Ebene.

Figuren heißen gleich, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben.

5) Ein **Vieleck** (oder Polygon — Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w.) ist eine geradlinig begrenzte Figur.

Die Grenzlinien eines Vielecks heißen **Seiten**, ihre Schnittpunkte **Ecken**, die von den Seiten (an den Ecken) gebildeten (inneren) **Winkel Winkel des Vielecks.**

Die Verbindungslinien von zwei nicht benachbarten Ecken eines Vielecks heißen **Diagonalen.**

Ein Vieleck von n Ecken (n-Eck) hat auch n Winkel und n Seiten; von jeder seiner Ecken gehen (n — 3) Diagonalen aus.

6) Verlängert man eine Seite einer geradlinig begrenzten Figur, so bildet diese Verlängerung mit der benachbarten Seite einen **Außenwinkel** der Figur.

§ 14. Von den Seiten und Winkeln der Dreiecke.

1) Die einfachste geradlinig begrenzte Figur ist das **Dreieck.** Ein Dreieck entsteht, wenn drei Gerade einander in drei Punkten schneiden. Die drei Seiten und die drei Winkel des Dreiecks nennt man auch seine sechs **Stücke.**

Jede Dreiecksseite liegt einem **Dreieckswinkel gegenüber** und hat zwei ihr anliegende Winkel.

Jeder Dreieckswinkel liegt einer Dreiecksseite gegenüber und hat zwei ihn einschließende Seiten.

In Fig. 22 liegt die Seite BC (oder a) dem Winkel α gegenüber; die ihr anliegenden Winkel sind β und γ.

Der Winkel α liegt der Seite BC (oder a) gegenüber; die ihn einschließenden Seiten sind AB und AC (c und b).

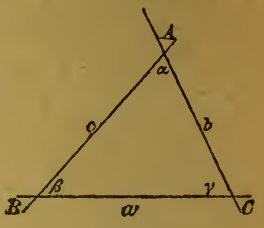


Fig. 22.

2) **Erklärungen.** Ein Dreieck heißt **gleichseitig**, wenn es drei gleiche Seiten hat.

Ein Dreieck heißt **gleichschenklig**, wenn es zwei gleiche Seiten hat. Die beiden gleichen Seiten heißen **Schenkel**, die dritte Seite heißt **Grundseite** (Grundlinie, Basis); die der Grundseite gegenüberliegende Ecke heißt **Spitze**, die Winkel an der Grundseite **Basiswinkel**.

Ein Dreieck heißt **ungleichseitig**, wenn keine seiner Seiten einer anderen gleich ist.

3) **Lehrsatz.** In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Denn da (Fig. 22) die Strecke BC den kürzesten Weg zwischen B und C angibt (§ 7, 7), so ist

$$AB + AC > BC.$$

4) **Lehrsatz.** In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

Denn da nach dem vorigen Satze $BC < AB + AC$ ist,
und da ferner $AB = AB$ ist,
so folgt $BC - AB < AC$ (Gl. von Ungl. subtr. . . . .)

5) **Lehrsatz.** In jedem Dreieck ist ein Außenwinkel gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel, die nicht seine Nebenwinkel sind.

Vor. $\angle ABC < 2R$, $\angle BCD = 2R$ (Fig. 23).

Beh. $\angle ACD = \alpha + \beta$.

Bew. Man ziehe CE parallel BA.

Da $\iota = \alpha$ (Wechselwinkel an Parallelen)
und $\varkappa = \beta$ ist (Gegenwinkel an Parallelen),
so folgt $\iota + \varkappa = \alpha + \beta$ (Gl. zu Gl. addiert . . .),
mithin $\angle ACD = \alpha + \beta$.

Folgerung. Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder Dreieckswinkel, der nicht sein Nebenwinkel ist.

6) **Lehrsatz.** In jedem Dreieck beträgt die Summe der drei Winkel zwei Rechte.

Vor. $\angle ABC < 2R$ (Fig. 23).

Beh. $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.

Bew. Verlängert man BC über C,

so ist $\angle ACD + \gamma = 2R$ (Nebenwinkel).

Da aber $\angle ACD = \alpha + \beta$ ist (5. Lehrsatz),

so ist auch $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ (Gl. Größen darf man . . .).

Folgerungen. 1. Wenn man zwei Winkel eines Dreiecks kennt, so findet man den dritten, indem man ihre Summe von zwei Rechten abzieht (durch Rechnung oder durch Konstruktion nach § 9, 5). Zwei Dreiecke, die in zwei Winkeln übereinstimmen, stimmen auch im dritten Winkel überein.

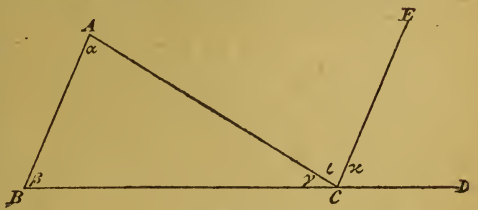


Fig. 23.

2. Ein Dreieck kann nur einen rechten oder einen stumpfen Winkel enthalten, sodaß zwei seiner Winkel immer spitz sind.

3. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden kann man auf diese nur ein Lot fällen. (Denn gäbe es zwei Lote von dem Punkte auf die Gerade, so würde ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen, sodaß für den dritten Winkel nichts übrig bliebe.)

7) **Erklärungen.** Ein Dreieck heißt **spitzwinklig**, wenn es drei spitze Winkel enthält.

Ein Dreieck heißt **stumpfwinklig**, wenn es einen stumpfen und zwei spitze Winkel enthält.

Ein Dreieck heißt **rechtwinklig**, wenn es einen rechten und zwei spitze Winkel enthält. Die Gegenseite des rechten Winkels heißt **Hypotenuse**, die ihn einschließenden Seiten heißen **Katheten**.

Weitere Lehrsätze.

8) Verlängert man an jeder Ecke des Dreiecks nur eine Seite, so betragen die entstehenden drei Außenwinkel des Dreiecks zusammen vier Rechte. $\iota + \varkappa + \lambda = 4R$ (Fig. 24). Dies ist zu beweisen mit Hilfe der Lehrsätze 5) und 6).

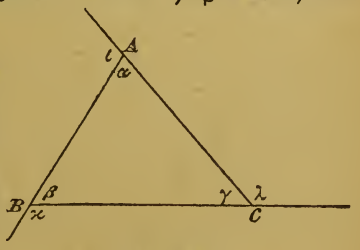


Fig. 24.

9) Die Summe der Winkel eines Vierecks beträgt vier Rechte.
10) Die Summe der Winkel eines n-Ecks beträgt (2n—4) Rechte (dies ist durch Zerlegung des n-Ecks in Dreiecke zu beweisen).
11) Verlängert man an jeder Ecke eines Vielecks nur eine Seite, so betragen die entstehenden Außenwinkel des n-Ecks zusammen vier Rechte.
12) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich oder betragen 2 R.

Zweiter Abschnitt. Die Kongruenz der Dreiecke nebst Anwendungen.

§ 15. Von der Kongruenz der Dreiecke.

1) **Erklärung.** Zwei Figuren heißen **kongruent** (≅)*), wenn sie sich so aufeinander legen lassen, daß sie sich gegenseitig decken.

Beispiele kongruenter Figuren sind: zwei gleiche Kreise (mit gleichem Radius), zwei Halbkreise desselben Kreises oder gleicher Kreise, zwei Quadranten desselben Kreises oder gleicher Kreise, zwei gleiche Quadrate (mit gleicher Seite) u. s. f.

Entsprechende (homologe) Stücke (Seiten, Winkel u. s. w.; vgl. § 14, 1) kongruenter Dreiecke heißen diejenigen, die bei dem Aufeinanderlegen der Dreiecke zur Deckung kommen. — Oder auch:

Entsprechende (homologe) **Seiten** in kongruenten Dreiecken sind solche, die gleichen Winkeln gegenüberliegen.

Entsprechende (homologe) **Winkel** in kongruenten Dreiecken sind solche, die gleichen Seiten gegenüberliegen.

In Fig. 25 sind entsprechend: AB und DE (IK), AC und DF (IL), BC und EF (KL); α und δ (ι), β und ε ($\varkappa$), γ und φ (λ).

Folgerung. In kongruenten Dreiecken sind die entsprechenden Stücke (Seiten und Winkel) einander gleich.

2) **Bemerkung.** Die sieben Dreiecke der Fig. 25 sind kongruent. Jedes Dreieck DEF kann durch Drehung und Verschiebung in der Ebene mit dem Dreieck ABC zur Deckung gebracht werden. Dagegen kann jedes Dreieck IKL mit dem Dreieck ABC erst zur Deckung gebracht werden, nachdem es „herumgeklappt" (die Unterseite der Ebene — des Papiers — nach oben gekehrt) ist.

---

*) Bei Leibniz (1646—1716), Characteristica geometrica 1679 (Math. W. W. herausg. von Gerhard. V. 141—171) das Zeichen ≃, wobei ∼ gleich einem liegenden *s* (similis) ist.

Bei Erörterung der Kongruenz von Dreiecken wird zwischen solchen verschiedenen Lagen nicht unterschieden.

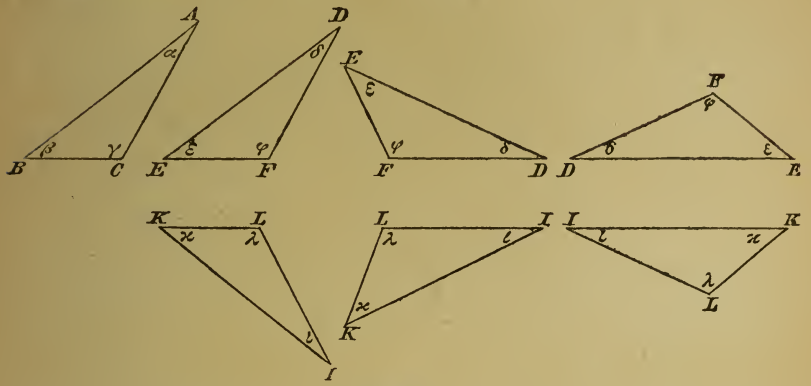


Fig. 25.

3) **Erster Kongruenzsatz.** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Vor. $AB = DE$, $BC = EF$, $\beta = \varepsilon$ (Fig. 26).*)

Beh. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Man lege das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC, daß die Ecke E auf B und die Seite EF in die Richtung von BC fällt; dann muß auch die Ecke F auf C fallen, (weil nach der Vor. $EF = BC$ ist). Ferner muß die Seite ED in die Richtung von BA fallen (weil nach der Vor. $\varepsilon = \beta$ ist) und die Ecke D auf A fallen (weil nach der Vor. $DE = AB$ ist). Dann muß aber auch DF auf AC fallen, weil es zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie gibt (§ 7, 7). Die Dreiecke decken sich also gegenseitig, d. h. sie sind kongruent.

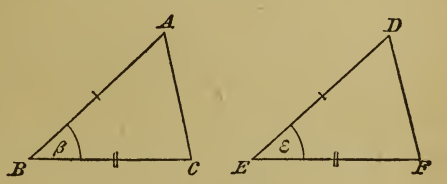


Fig. 26.

4) **Zweiter Kongruenzsatz.** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Vor. $AB = DE$, $\alpha = \delta$, $\beta = \varepsilon$ (Fig. 27).

---

*) Hier und im folgenden sollen die Stücke von Dreiecken, die nach der Voraussetzung einander gleich sind, mit gleichen Winkelzeichen und Strichelchen versehen werden.

Beh. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Man lege das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC, daß die Ecke D auf A und die Seite DE in die Richtung von AB fällt; dann fällt auch die Ecke E auf B (weil nach der Vor. $DE = AB$ ist). Ferner fällt die Seite DF in die Richtung von AC

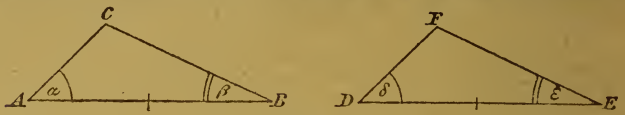


Fig. 27.

(weil nach der Vor. $\angle \delta = \angle \alpha$ ist) und EF in die Richtung von BC (weil nach der Vor. $\angle \varepsilon = \angle \beta$ ist). Endlich fällt auch die Ecke F auf C, weil zwei Gerade nur einen Schnittpunkt haben (§ 9, 1). Die Dreiecke ABC und DEF decken sich also gegenseitig, d. h. sie sind kongruent.

Zusatz. Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Denn nach § 14, 6 Folg. 1 stimmen die Dreiecke dann in allen Winkeln, also auch in den beiden der Seite anliegenden Winkeln, überein.

Anmerkung. Wenn im folgenden der erste oder zweite Kongruenzsatz oder der Zusatz zum zweiten angeführt und benutzt wird, so soll das durch die Abkürzungen (I), (II), (II Zus.) geschehen (ebenso später durch (III) bezw. (IV) beim dritten und vierten Kongruenzsatze).

5) **Lehrsatz.** Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundseite (die Basiswinkel) einander gleich.

Vor. $AB = AC$ (Fig. 28).

Beh. $\angle ABC = \angle ACB$.

Fig. 28.

Bew. Man denke sich den Winkel an der Spitze ($\angle BAC$) durch die Gerade AD halbiert, sodaß also

$\angle DAB = \angle DAC$ ist.

Da außerdem $AB = AC$ (Vor.)

und $AD = AD$ ist,

so ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (I).

Da aber in kongruenten Dreiecken die entsprechenden Winkel einander gleich sind (1, Folg.), so ist $\angle ABC = \angle ACB$.

Folgerungen. 1. Im gleichseitigen Dreieck sind alle drei Winkel einander gleich, jeder beträgt also $\frac{1}{3}$ R oder 60°.

2. Im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck beträgt jeder spitze Winkel $\frac{1}{2}$ R oder 45°.

3. Im gleichschenkligen Dreieck ist der Außenwinkel an der Spitze doppelt so groß wie jeder Basiswinkel. Der Beweis folgt aus dem Lehrsatze in Verbindung mit § 14, 5.

6) Lehrsatz (Umkehrung des vorigen). Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist gleichschenklig.

Vor. $\angle ABC = \angle ACB$ (Fig. 29).

Beh. $AB = AC$.

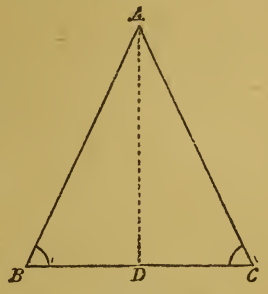


Fig. 29.

Bew. Man denke sich den dritten Winkel ($\angle BAC$) (wie beim Beweise zu 5) durch die Gerade AD halbiert, sodaß

$\angle DAB = \angle DAC$ wird.

Da dann außerdem

$\angle ABC = \angle ACB$ (Vor.)

und $AD = AD$ ist,

so ist

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (II Zus.).

Da aber die entsprechenden Seiten in kongruenten Dreiecken einander gleich sind (1, Folg.),

so ist $AB = AC$.

Folgerung. Ein Dreieck mit drei gleichen Winkeln ist gleichseitig.

7) Lehrsatz. Der größeren von zwei Dreiecksseiten liegt auch der größere Winkel gegenüber.

Vor. $AC > AB$ (Fig. 30).

Beh. $\angle ABC > \gamma$.

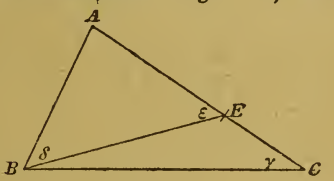


Fig. 30.

Bew. Man beschreibe um den Punkt A mit AB den Kreisbogen, der AC in E trifft, und ziehe BE. Dann ist

$\delta = \varepsilon$ (Basiswinkel in dem Dreieck BAE).

Ferner ist

$\varepsilon > \gamma$ (§ 14, 5 Folg.), also auch

$\delta > \gamma$, umsomehr also

$\angle ABC > \gamma$.

Folgerungen. 1. Der größten Seite eines Dreiecks liegt auch der größte Winkel gegenüber.

2. Die der größten Seite eines Dreiecks anliegenden Winkel sind beide spitz.

3. Der Winkel, der der kleineren von zwei Seiten eines Dreiecks gegenüberliegt, ist stets spitz.

8) **Lehrsatz** (Umkehrung des vorigen). Dem größeren von zwei Dreieckswinkeln liegt auch die größere Seite gegenüber.

Vor. $\beta > \gamma$ (Fig. 31).

Beh. $AC > AB$.

Bew. (indirekt).

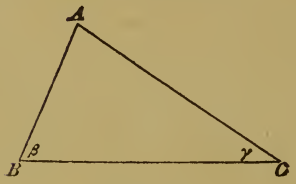


Fig. 31.

Wäre $AC < AB$, so müßte auch $\beta < \gamma$ sein (7, Lehrs.), was gegen die Vor. ist.

Wäre $AC = AB$, so müßte auch $\beta = \gamma$ sein (5, Lehrs.), was ebenso gegen die Vor. ist.

Daher muß notwendig $AC > AB$ sein.

Folgerungen. 1. Dem größten Winkel eines Dreiecks liegt auch die größte Seite gegenüber.

2. Von allen Strecken, die einen Punkt mit einer Geraden verbinden, ist das von dem Punkte auf die Gerade gefällte Lot die kürzeste.

9) **Erklärung. Abstand (Entfernung) eines Punktes von einer Geraden** heißt das von dem Punkte auf die Gerade gefällte Lot.

10) **Dritter Kongruenzsatz.** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Vor. $BC = EF$, $AC = DF$, $AB = DE$ (Fig. 32).

Beh. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Man lege das Dreieck DEF so an das Dreieck ABC, daß es in die Lage DBC kommt (daß die größten Seiten

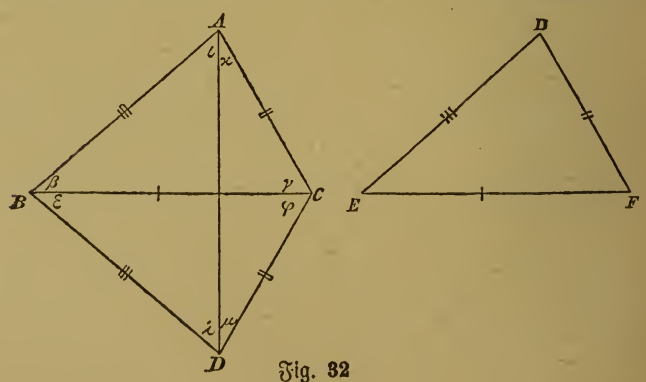


Fig. 32

aufeinander fallen), und ziehe AD. Diese Verbindungslinie AD muß, da die vier Winkel β, ε, γ und φ sämtlich spitz sind (7, Folg. 2), also jeder der Winkel ABD und ACD kleiner als 2 R ist, innerhalb der Viereckfläche ABDC liegen. Nun ist

$$\angle BAC = \iota + \varkappa, \text{ und } \angle EDF = \lambda + \mu.$$

Ferner ist $\iota = \lambda$ (5. Lehrs.) und

$$\varkappa = \mu \text{ (5. Lehrs.), folglich}$$

$$\iota + \varkappa = \lambda + \mu \text{ (Gl. zu Gl. add. . . . .),}$$

d. h. $\angle BAC = \angle BDC$ oder

$$\angle BAC = \angle EDF.$$

Folglich ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (I).

11) **Vierter Kongruenzsatz.** Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Vor. $BC = EF$, $AB = DE$, $(BC > AB)$, $\alpha = \delta$ (Fig. 33 I, II, III).

Beh. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Man lege das Dreieck DEF so an das Dreieck ABC, daß es in die Lage BCD kommt (EF auf BC), und ziehe AD. Da die Winkel γ und φ notwendig spitz sind (7, Folg. 3), also

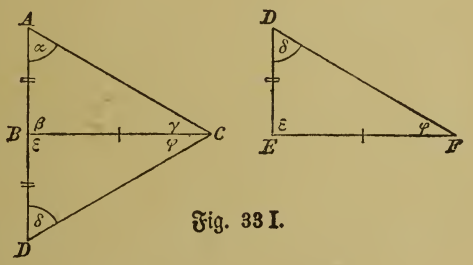


Fig. 33 I.

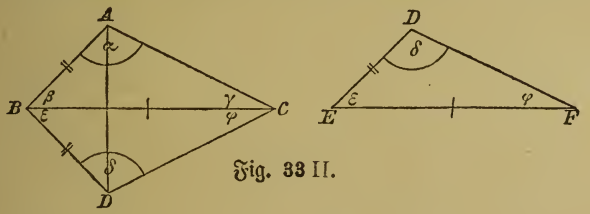


Fig. 33 II.

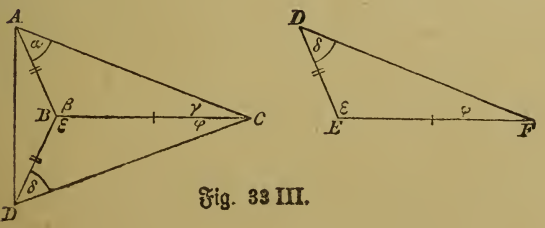


Fig. 33 III.

der Winkel ACD kleiner als 2 R ist, so kann AD weder durch C gehen, noch die Verlängerung von BC über C hinaus schneiden. Da aber über die Seiten AC und DF keinerlei Voraussetzung gemacht ist, so kann über ihre Gegenwinkel von vornherein nichts ausgesagt werden; daher kann AD durch B gehen (Fig. 33 I) oder BC schneiden (Fig. 33 II) oder die Verlängerung von BC über B hinaus schneiden (Fig. 33 III).

I. Geht AD durch B, so folgt aus der Gleichheit von α und δ, daß $DC = AC$ ist (6, Lehrs.). Folglich ist $\triangle DBC \cong \triangle ABC$, also auch $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ (I.).

II. Geht AD durch BC, so ist $\alpha = \delta$ (Vor.)
und $\angle BAD = \angle BDA$ (5, Lehrs.);
folglich ist $\angle CAD = \angle CDA$ (Gl. von Gl. subtrahiert . . . .).

Folglich ist wieder $AC = DC = DF$, also auch $\triangle DBC \cong \triangle ABC$ oder $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ (I. oder III.).

III. Geht AD nicht durch BC, so ist $\alpha = \delta$ (Vor.)
und $\angle BAD = \angle BDA$ (5, Lehrs.);
folglich ist $\angle CAD = \angle CDA$ (Gl. zu Gl. add. . . . .), u. s. f. wie im II. Falle.

12) **Indirekter Beweis des vierten Kongruenzsatzes** (Fig. 34).

Vor. $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle ACB = DFE$, $AB > AC$.

Beh. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

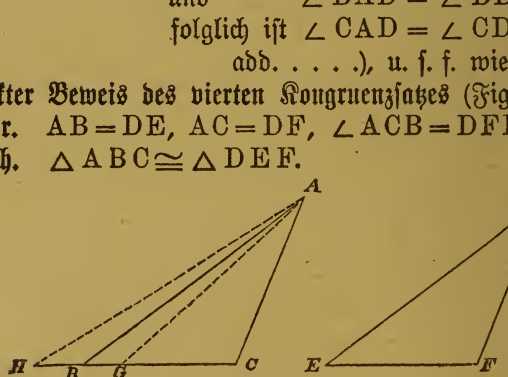


Fig. 34.

Bew. Man lege das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC, daß die Ecke D auf A und die Seite DF in die Richtung von AC fällt; dann fällt auch die Ecke F auf C (weil nach der Vor. $DF = AC$ ist). Ferner fällt FE auf CB (weil nach der Vor. $\angle DFE = \angle ACB$ ist). Wenn nun der Punkt E nicht auf den Punkt B fällt, so muß er entweder auf die Seite CB selbst oder auf ihre Verlängerung über B hinaus fallen.

Fiele E auf CB, nach G, so wäre $GA = ED = BA$ und GAB ein gleichschenkliges Dreieck,

also $\angle AGB = \angle ABG$. Da aber
als Außenwinkel $\angle AGB > \angle ACG$ ist, so wäre auch
$\angle ABC > \angle ACB$, also auch
$AC > AB$ (8, Lehrs.),
was der Voraussetzung widerspricht.

Fiele dagegen E auf die Verlängerung von CB nach H, so wäre das Dreieck HAB gleichschenklig, also

$$\angle AHB = \angle ABH.$$

Dann wäre $\angle ABH > \angle ACB$ als Außenwinkel,
also auch $\angle AHB > \angle ACB$,
also auch $AC > AH$, oder
$AC > AB$ (da $AH = AB$ ist),
was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Es bleibt also nur übrig, daß die Ecke E mit B zusammenfällt, daß also auch die Seite DE auf AB fällt. Dann aber decken sich die Dreiecke gegenseitig, sind also kongruent.

13) Um zu zeigen, daß zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem der kleineren von beiden gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, wohl kongruent sein können, aber nicht kongruent sein müssen, beschreibe man um die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks einen Kreisbogen, der die Grundseite in D und E trifft (Fig. 35). Dann sind

die beiden stumpfwinkligen Dreiecke ABD und ACE, die beiden spitzwinkligen Dreiecke ABE und ACD } kongruent,

das stumpfwinkl. Dr. ABD u. das spitzwinkl. Dr. ACD, das spitzwinkl. Dr. ABE u. das stumpfwinkl. Dr. ACE } nicht kongruent;

alle vier Dreiecke aber stimmen in zwei Seiten und dem der kleineren von beiden gegenüberliegenden Winkel überein.

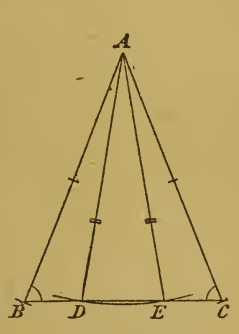


Fig. 35.

Anmerkung. Sind zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem der kleineren von beiden gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, nicht kongruent, so muß die Summe der den größeren Seiten gegenüberliegenden Winkel 2 R betragen.

14) **Lehrsatz.** Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, sind aber die eingeschlossenen Winkel in beiden ungleich, so sind auch

ihre dritten Seiten ungleich, und zwar liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Vor. $AB = DE$, $AC = DF$, $\delta > \alpha$ (Fig. 36).

Beh. $EF > BC$.

Bew. Da $\alpha+\beta+\gamma=\delta+\varepsilon+\varphi$ ist (je 2 R),

und da $\alpha \quad < \delta$ ist (Vor.),

so muß $\beta+\gamma > \varepsilon+\varphi$ sein (Ungl. von Gl. subtr.....);

daher kann unmöglich sowohl $\beta \leqq \varepsilon$ als auch $\gamma \leqq \varphi$ sein.

Ist nun $\beta > \varepsilon$ (Fig. 36), so lege man das Dreieck ABC so auf das Dreieck DEF, daß die Seite AB auf die ihr gleiche Seite DE fällt; dann muß BC außerhalb des Dreiecks DEF fallen, das Dreieck ABC also in die neue Lage DEC kommen. Zieht man noch CF, so ist das Dreieck CDF gleichschenklig, also $\angle DFC = \angle DCF$ (5, Lehrs.). Da nun der Winkel DFC größer als sein Teil EFC ist, so ist auch der ihm gleiche Winkel DCF größer als der Winkel EFC. Umsomehr ist dann der ganze Winkel ECF größer als der Winkel EFC. Daraus folgt aber für das Dreieck EFC (8, Lehrs.), daß $EF > EC$ ist; folglich ist auch $EF > BC$.

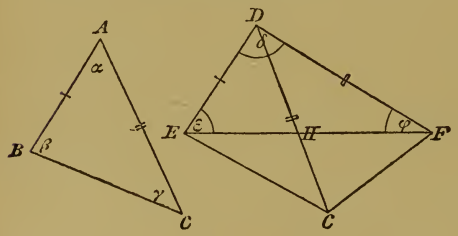


Fig. 36.

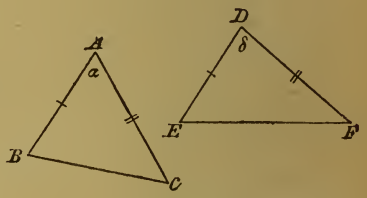


Fig. 37.

15) Lehrsatz (Umkehrung des vorigen). Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, sind aber die dritten Seiten in beiden ungleich, so sind auch die diesen dritten Seiten gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Vor. $AB = DE$, $AC = DF$, $EF > BC$ (Fig. 37).

Beh. $\delta > \alpha$.

Bew. (indirekt).

Wäre $\delta < \alpha$, so müßte auch

$EF < BC$ sein (14, Lehrs.), was der Voraussetzung widerspricht.

Wäre $\delta = \alpha$, so müßte
$\triangle DEF \cong \triangle ABC$, also auch
$EF = BC$ sein, was gleichfalls der Voraussetzung widerspricht.

Daher muß $\delta > \alpha$ sein.

§ 16. Lehrsätze vom gleichschenkligen Dreieck.

1) Im gleichschenkligen Dreieck geht die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze durch die Mitte der Grundseite und steht auf ihr senkrecht.

Vor. $AB = AC$, $\varepsilon = \varphi$ (Fig. 38).
Beh. $BD = DC$, $AD \perp BC$.
Bew. Es ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (I),
folglich $BD = DC$.
Aus der Kongruenz folgt ferner, daß
$\angle ADB = \angle ADC$ ist.
Da sie Nebenwinkel sind, muß jeder von ihnen ein Rechter sein, d. h. AD muß senkrecht auf BC stehen.

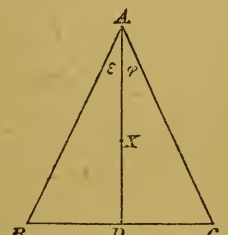


Fig. 38.

2) Im gleichschenkligen Dreieck halbiert das von der Spitze auf die Grundseite gefällte Lot diese und den Winkel an der Spitze.

Vor. $AB = AC$, $AD \perp BC$ (Fig. 38).
Beh. $BD = DC$, $\varepsilon = \varphi$.
Bew. Es ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (IV), folglich ist $BD = DC$ und $\varepsilon = \varphi$.

3) Im gleichschenkligen Dreieck steht die Verbindungslinie der Spitze mit der Mitte der Grundseite auf dieser senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.

Vor. $AB = AC$, $BD = DC$ (A ist mit D verbunden) (Fig. 38).
Beh. $AD \perp BC$, $\varepsilon = \varphi$.
Bew. Es ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (III), folglich $AD \perp BC$ (wie im Beweise zu 1) und $\varepsilon = \varphi$.

4) Im gleichschenkligen Dreieck geht das auf der Grundseite in ihrer Mitte errichtete Lot durch die Spitze.

Vor. $AB = AC$, $BD = DC$, $DX \perp BC$ (Fig. 38).
Beh. DX geht durch den Punkt A.
Bew. Da nach 3) die Verbindungslinie AD auf BC senkrecht steht, und da man in einem Punkte (D) auf einer Geraden (BC) nur ein Lot errichten kann, so muß das in D auf BC errichtete Lot durch A gehen.

5) Stehen zwei gleichschenklige Dreiecke auf derselben Grundseite, und verbindet man ihre Spitzen (durch eine Gerade), so halbiert die Verbindungslinie (bezw. ihre Verlängerung) die Winkel an den Spitzen und die Grundseite, und steht auf ihr senkrecht.

Vor. $AB = AC$, $DB = DC$ (Fig. 39 I und II).

Beh. $\iota = \varkappa$, $\lambda = \mu$, $BE = EC$, $AE \perp BC$.

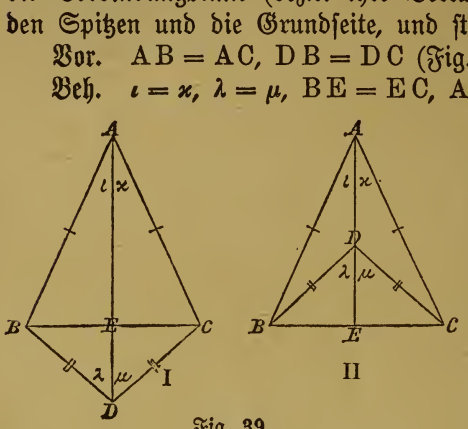


Fig. 39.

Bew. Aus der Kongruenz der Dreiecke ABD und ACD (III) folgt für Fig. 39 I und II, daß $\iota = \varkappa$ ist; für I außerdem sofort, daß $\lambda = \mu$ ist. In II folgt aus derselben Kongruenz die Gleichheit der Winkel ADB und ADC, hieraus aber die Gleichheit von λ und μ (als ihrer Nebenwinkel; § 10, 5).

Dann ist $BE = EC$ und $AE \perp BC$ nach 1, Lehrs.

§ 17. Die planimetrischen Grundaufgaben.

1) Eine **planimetrische Aufgabe** enthält die Forderung, eine Figur zu zeichnen, deren Seiten, Winkel u. s. f. bestimmten Bedingungen genügen.

Als stets ohne weiteres ausführbar gelten die folgenden Aufgaben:

a. die Gerade zwischen zwei gegebenen Punkten zu ziehen, und eine gegebene Gerade zu verlängern (mit Benutzung des Lineals),

b. den Kreis um einen gegebenen Punkt mit einem gegebenen Radius zu beschreiben; insbesondere auf einer gegebenen Geraden von einem gegebenen Punkte aus eine gegebene Strecke abzutragen (mit Benutzung des Zirkels).

Eine planimetrische Aufgabe durch **Konstruktion** lösen bedeutet: die Forderung der Aufgabe durch eine Zeichnung erfüllen, die nur mit Benutzung von Lineal und Zirkel ausgeführt wird (ohne Benutzung eines Maßstabes, eines Winkelmaßes, eines Transporteurs und anderer Instrumente).

2) **Aufgabe.** Eine gegebene Strecke zu halbieren.

Gegeben ist die Strecke AB (Fig. 40).

Konstruktion. Man beschreibe um die Endpunkte A und B der Strecke Kreisbögen, die einander in C und D schneiden, und ziehe CD; der Schnittpunkt von CD und AB heiße E.

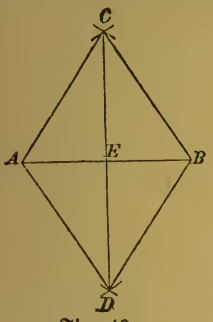


Fig. 40.

Beh. $AE = EB$.

Bew. Der Beweis folgt aus § 16, 5.

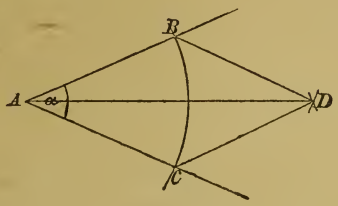


Fig. 41.

3) **Aufgabe.** Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Gegeben ist der Winkel α (Fig. 41).

Konstr. Man beschreibe um den Scheitel A des Winkels α einen Kreisbogen, der die Schenkel in B und C trifft, und mit demselben Radius um B und C Kreisbögen, die einander in D schneiden; dann ziehe man AD.

Beh. $\angle BAD = \angle CAD$.

Bew. Der Beweis folgt aus § 16, 5.

Durch Fortsetzung der in 2) und 3) angegebenen Verfahren kann man eine Strecke oder einen Winkel auch in 4, 8, 16, 32 . . . gleiche Teile teilen.

4) **Aufgabe.** Von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade das Lot zu fällen (vgl. § 14, 6, Folg. 3).

Gegeben sind die Gerade LM und der Punkt A außerhalb LM (Fig. 42).

Konstr. Man beschreibe um den Punkt A einen Kreisbogen, der die Gerade in B und C trifft, darauf um diese beiden Punkte mit demselben Radius Kreisbögen, die einander in D schneiden, und ziehe AD.

Beh. $AD \perp LM$.

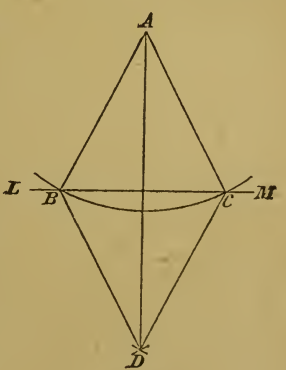


Fig. 42.

Bew. Der Beweis folgt aus § 16, 5, wenn man AB, AC, BD und CD zieht.

5) Aufgabe. In einem gegebenen Punkte auf einer gegebenen Geraden das Lot zu errichten.

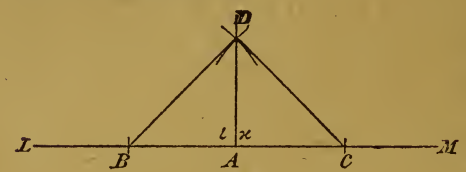


Fig. 43.

Gegeben ist die Gerade LM und auf ihr der Punkt A (Fig. 43).

Konstr. Man trage von A aus auf der Geraden gleiche Stücke AB und AC ab, beschreibe um B und C mit einem größeren Radius Kreisbögen, die einander in D schneiden, und ziehe AD.

Beh. $AD \perp LM$.

Bew. Zieht man noch DB und DC, so ist $\triangle DAB \cong \triangle DAC$ (III), da $AB = AC$ (Konstr.), $DB = DC$ (Konstr.) und $DA = DA$ ist. Folglich ist $\iota = \varkappa$, also jeder von beiden ein Rechter (§ 10, 2, Folg.), d. h. AD steht senkrecht auf LM.

Anmerkung. Die angegebene Konstruktion stimmt mit der für die Halbierung eines gestreckten Winkels ($\angle$ LAM in Fig. 43) überein.

6) Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallele zu ziehen.

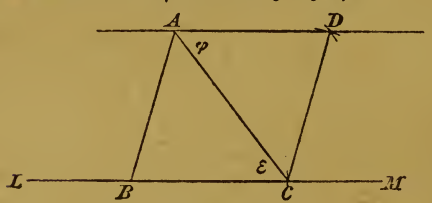


Fig. 44.

Gegeben sind die Gerade LM und der Punkt A außerhalb LM (Fig. 44).

Konstr. Man verbinde A mit einem beliebigen Punkte B der Geraden, trage AB von B aus auf der Geraden ab (bis C), beschreibe um A und C mit derselben Zirkelöffnung Kreisbögen, die einander in D schneiden, und ziehe AD.

Beh. $AD \parallel LM$.

Beweis. Zieht man noch CD und CA, so ist $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (III), da $AB = CD$ (Konstr.), $BC = DA$ (Konstr.) und $AC = CA$ ist. Folglich ist $\varepsilon = \varphi$, also auch $AD \parallel LM$ (§ 12, 7).

7) Aufgabe. An eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte einen gegebenen Winkel anzutragen.

Gegeben sind die Gerade LM, auf ihr der Punkt A und der Winkel β (Fig. 45).

Konstr. Man beschreibe um den Scheitel B des Winkels β einen Kreisbogen, der die Schenkel in C und D trifft, und mit derselben Zirkelöffnung um A einen Kreisbogen, der die Gerade LM in E trifft. Dann beschreibe man mit dem Abstande CD um E einen Kreisbogen, der den anderen Bogen in F trifft, und ziehe AF.

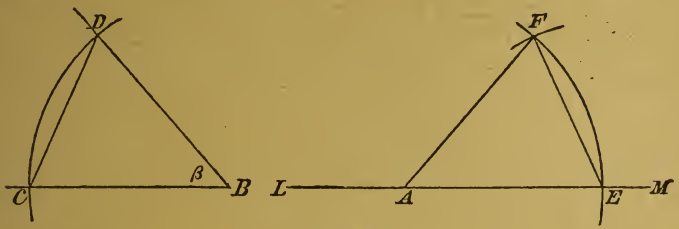


Fig. 45.

Beh. $\angle EAF = \beta$.

Bew. Zieht man noch CD und EF, so ist $\triangle EAF \cong \triangle CBD$ (III), da $EA = CB$, $FA = DB$ und $EF = CD$ ist (nach der Konstr.); folglich ist $\angle EAF = \beta$.

8) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren, von dem zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Gegeben sind die Strecken r und s und der Winkel φ.

Konstr. Man zeichne (Fig. 46) die Strecke AB (r), trage in A an AB den Winkel φ an, trage auf dem freien Schenkel von A aus die Strecke s (AC) ab und ziehe BC; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Das Dreieck kann immer konstruiert werden.

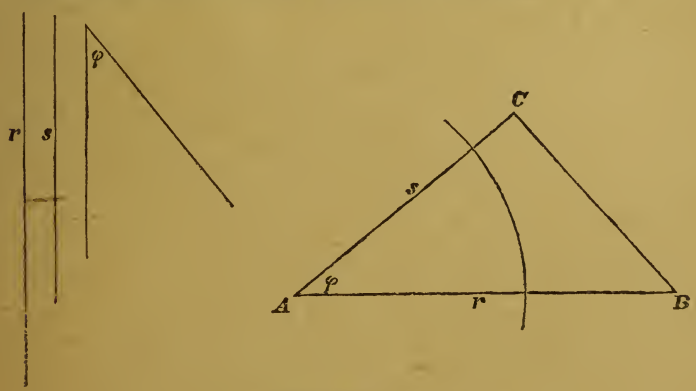


Fig. 46.

Da der Winkel φ sowohl in A als auch in B, sowohl nach oben als nach unten angetragen werden kann, so ergeben sich vier Dreiecke, die aber kongruent sind, daher dieselbe Lösung bieten.

9) **Aufgabe.** a. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Gegeben ist die Strecke s und die Winkel φ und ψ.

Konstr. Man zeichne (Fig. 47, I) die Strecke BC (s), trage in B an BC den Winkel φ, in C an CB nach derselben Seite den Winkel ψ an, deren freie Schenkel einander in A schneiden; so ist ABC das verlangte Dreieck.

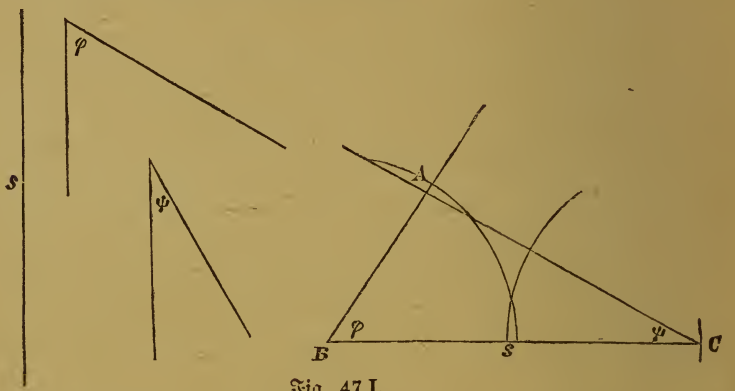


Fig. 47 I.

Das Dreieck kann immer konstruiert werden, wenn

$$\varphi + \psi < 2\,\mathrm{R}.$$

Da φ und ψ auch nach unten, ferner auch ψ in B, φ in C angetragen werden können, so ergeben sich wieder vier kongruente, dieselbe Lösung bietende Dreiecke.

b. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel.

Gegeben ist die Strecke s, der Winkel φ, der ihr anliegen, und der Winkel ψ, der ihr gegenüberliegen soll.

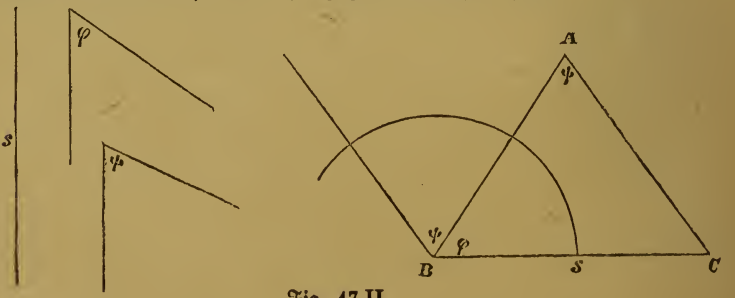


Fig. 47 II.

Konstr. Man zeichne (Fig. 47, II) die Strecke B C (s), trage in B den Winkel φ an, an seinen freien Schenkel in derselben Richtung in B den Winkel ψ (so daß die Summe $\varphi + \psi$ entsteht) und ziehe zu dem freien Schenkel von ψ durch C die Parallele, die den freien Schenkel von φ in A trifft; so ist A B C das verlangte Dreieck. Denn der Winkel B A C ist als Wechselwinkel an Parallelen gleich dem Winkel ψ, das Dreieck enthält also die gegebenen Stücke.

Das Dreieck kann immer konstruiert werden, wenn

$$\varphi + \psi < 2\,\mathrm{R}.$$

Da der Winkel φ sowohl in B als auch in C, sowohl nach oben als nach unten an B C angetragen werden kann, so entstehen wieder vier unter sich kongruente Dreiecke.

10) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus den drei Seiten.

Gegeben sind die Strecken r, s, t.

Konstr. Man zeichne (Fig. 48) die Strecke B C (r), beschreibe um B den Kreis mit s, um C den mit t als Radius. Schneiden die Kreise einander in A, so ziehe man A B und A C; A B C ist dann das verlangte Dreieck.

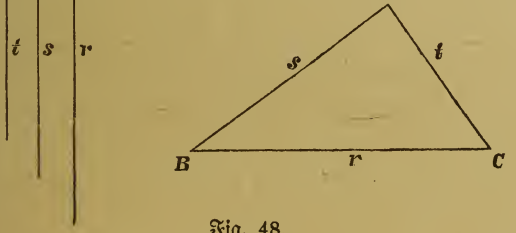


Fig. 48.

Das Dreieck kann konstruiert werden, wenn die größte der drei Strecken kleiner ist als die Summe der beiden anderen.

Da die Kreise einander in zwei Punkten (über und unter B C) schneiden, und da man auch um B mit t, um C mit s als Radius den Kreis schlagen kann, so ergeben sich wieder vier kongruente Dreiecke.

11) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Gegeben sind die Strecken r und s und der Winkel φ, der r gegenüberliegen soll. r ist größer als s.

Konstr. Man zeichne (Fig. 49) die Strecke B C (s), trage in B den Winkel φ an und beschreibe um C mit r als

Radius den Kreis, der den freien Schenkel von φ in A trifft. Zieht man AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Das Dreieck kann immer konstruiert werden.

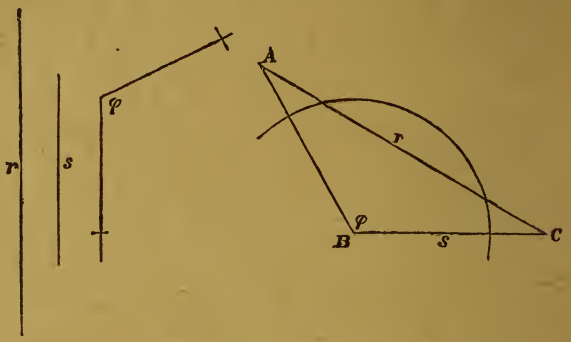


Fig. 49.

Je nachdem man den Winkel φ in B oder C, nach oben oder unten anträgt, entstehen vier kongruente Dreiecke.

12) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem der kleineren von ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Gegeben sind die Strecken r und s und der Winkel φ, der r gegenüberliegen soll. r ist kleiner als s.

Konstr. Man zeichne die Strecke BC (s), trage in B den Winkel φ an und beschreibe um C mit r als Radius den Kreis. Je nach der Größe von r können dann drei Fälle eintreten:

a. der Kreis trifft den freien Schenkel von φ gar nicht (Fig. 50a), es entsteht kein Dreieck, d. h. die Aufgabe kann mit den gegebenen Stücken nicht gelöst werden.

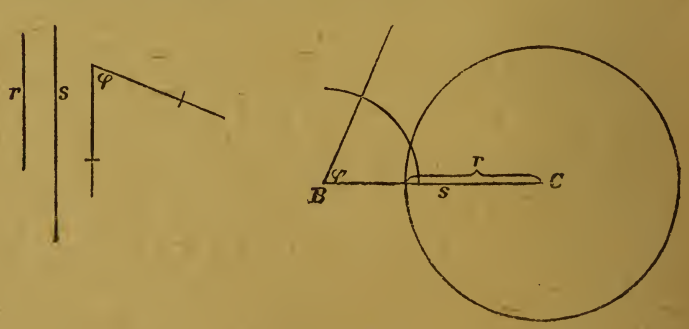


Fig. 50a.

b. der Kreis berührt den freien Schenkel von φ (Fig. 50b), es entsteht ein Dreieck.

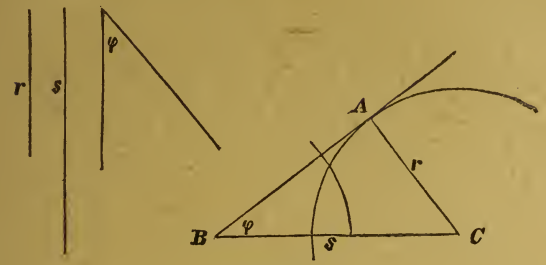


Fig. 50 b.

c. der Kreis schneidet den freien Schenkel von φ zweimal (Fig. 50c), in den Punkten A und D. Zieht man AC und DC, so entstehen zwei Dreiecke ABC und DBC, die beide die gegebenen Stücke r, s und φ in der verlangten Lage enthalten; sie sind aber nicht kongruent, d. h. die Aufgabe hat zwei Lösungen.

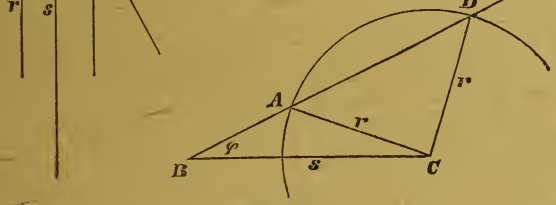


Fig. 50 c.

In den Fällen b. und c. gibt es auch hier für jede Lösung die vier, der Lage nach verschiedenen, kongruenten Dreiecke.

Anmerkung. Jedes Dreieck ist bestimmt durch drei Stücke, ein gleichschenkliges oder ein rechtwinkliges Dreieck durch zwei Stücke, ein gleichseitiges oder ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck durch ein Stück.

Die Stücke, die ein Dreieck bestimmen sollen, dürfen nie ausschließlich Winkel sein.

13) Weitere Aufgaben.

a. Einen Winkel von $22\frac{1}{2}^0$, 30^0, 45^0, 60^0, $67\frac{1}{2}^0$ ($\frac{R}{4}$, $\frac{R}{3}$, $\frac{R}{2}$, $\frac{2}{3}$ R,

$\frac{3}{4}$ R), $112\frac{1}{2}^0$, 120^0, 135^0, 150^0, $157\frac{1}{2}^0$ ($\frac{5}{4}$ R, $\frac{4}{3}$ R, $\frac{3}{2}$ R, $\frac{5}{3}$ R, $\frac{7}{4}$ R) zu zeichnen, oder auch einen Winkel von dieser Größe in einem gegebenen Punkte an eine gegebene Gerade anzutragen.

b. Eine Strecke in n (d. h. in beliebig viele, z. B. in 3, 5, 6, 7 ...) gleiche Teile zu teilen.

Die Lösung folgt erst in § 32, 4.

c. Einen Winkel in n (d. h. in beliebig viele, z. B. in 3, 5, 6, 7 ...) gleiche Teile zu teilen.

Die Lösung mit Lineal und Zirkel ist nicht möglich.

§ 18. Örter.

1) **Erklärung.** Liegen auf einer (geraden oder krummen) Linie alle Punkte, die einer gewissen Bedingung genügen, so heißt die Linie **geometrischer Ort** (oder kürzer **Ort**) dieser Punkte.

Soll eine Linie der Ort aller Punkte sein, die einer gegebenen Bedingung genügen, so ist zu zeigen:

I. daß jeder Punkt der Linie der gegebenen Bedingung genügt,

II. daß es außerhalb der Linie keinen Punkt gibt, der der gegebenen Bedingung genügt.

2) **Ort I.** Der Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung haben, ist der Kreis, der den gegebenen Punkt zum Mittelpunkte und die gegebene Entfernung zum Radius hat.

Dies folgt aus § 8, 6.

3) **Erklärung.** **Mittelsenkrechte (Mittellot)** einer Strecke heißt die Gerade, die auf der Strecke in ihrem Mittelpunkte senkrecht steht.

4) **Lehrsatz.** Jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke hat von ihren Endpunkten gleiche Entfernungen.

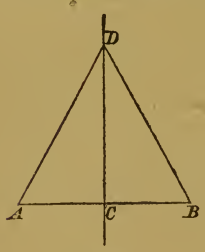


Fig. 51.

Vor. $CA = CB$, $DC \perp AB$ (Fig. 51).

Beh. $DA = DB$.

Bew. Da $CA = CB$, $\angle DCA = \angle DCB$ (als Rechte) und $CD = CD$ ist, so ist $\triangle DCA \cong \triangle DCB$(I); folglich ist $DA = DB$.

Zusatz. Alle Punkte, die nicht auf der Mittelsenkrechten einer Strecke liegen, sind von den Endpunkten dieser Strecke ungleich weit entfernt. Denn, wenn man einen Punkt X außerhalb der Mittelsenkrechten mit A, C und B verbindet, so gilt von den Dreiecken ACX und BCX der Satz § 15, 14.

5) **Ort II.** Der Ort aller Punkte, die von zwei gegebenen Punkten gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte der Verbindungslinie der beiden Punkte.

Umkehrung von 4, Lehrs.

6) **Lehrsatz.** Zwei Parallelen begrenzen auf zwei anderen Parallelen gleiche Abschnitte.

Vor. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ (Fig. 52).

Beh. $AB = DC$, $AD = BC$.

Bew. Es ist $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (II), da $BD = BD$, $\iota = \lambda$, $\mu = \varkappa$ (Wechselwinkel an Parallelen § 12, 5 b). Folglich ist $AB = DC$, $AD = BC$.

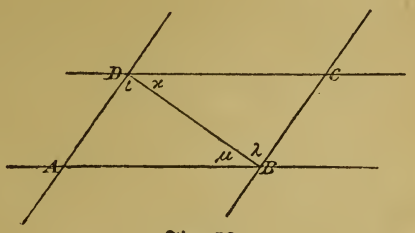


Fig. 52.

7) **Lehrsatz.** Alle Punkte einer Parallelen zu einer Geraden sind von dieser Geraden gleich weit entfernt.

Vor. $DC \parallel AB$, $DA \perp AB$, $CB \perp AB$ (Fig. 53).

Beh. $DA = CB$.

Bew. Da auch DA und CB als Lote auf derselben Geraden parallel sind (§ 12, 10), so folgt $DA = CB$ aus 6, Lehrs.

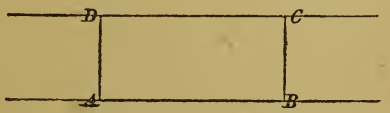


Fig. 53.

Zusatz. Alle Punkte, die nicht auf der Parallelen DC zu AB liegen, haben von AB einen größeren oder kleineren Abstand als die Punkte der Parallelen DC.

8) **Ort III.** Der Ort aller Punkte auf derselben Seite einer gegebenen Geraden, die von ihr eine gegebene Entfernung haben, ist eine Parallele zu dieser Geraden. (Umkehrung von 7, Lehrs.)

Alle Punkte, die von einer gegebenen Geraden gleich weit entfernt sind, liegen also auf zwei Parallelen zu dieser Geraden.

9) **Lehrsatz.** Jeder Punkt der Halbierungslinie eines Winkels hat von seinen beiden Schenkeln gleiche Entfernungen.

Vor. $\angle BAC = \angle BAD$, $BC \perp AC$, $BD \perp AD$ (Fig. 54).

Beh. $BC = BD$.

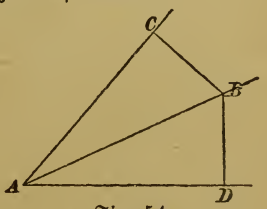


Fig. 54.

Bew. Da $AB = AB$
$\angle BAC = \angle BAD$ (Vor.)
und $\angle BCA = \angle BDA$ (als Rechte) ist,
so ist $\triangle BAC \cong \triangle BAD$ (II. Zus.),
also $BC = BD$.

10) **Ort IV.** Der Ort aller Punkte innerhalb eines gegebenen Winkels, die von seinen beiden Schenkeln gleich weit entfernt sind, ist die Halbierungslinie des Winkels. (Umkehrung von 9, Lehrs.)

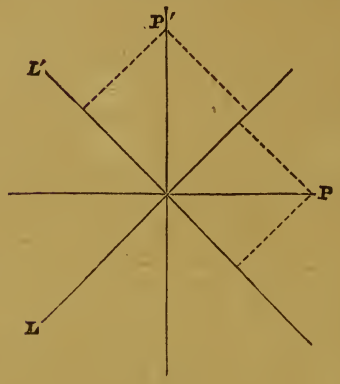


Fig. 55.

Alle Punkte, die von zwei gegebenen einander schneidenden Geraden gleich weit entfernt sind, liegen also auf den beiden Halbierungslinien der von den Geraden gebildeten Winkel (Fig. 55). (Die beiden Halbierungslinien stehen aufeinander senkrecht. — § 10, 5, c.)

Zusatz. Alle Punkte, die nicht auf der Halbierungslinie eines Winkels liegen, sind von dessen Schenkeln ungleich weit entfernt.

11) **Ort V.** Der Ort aller Punkte, die von zwei parallelen Geraden gleich weit entfernt sind, ist eine zwischen beiden und in gleichem Abstande von jeder von ihnen gezogene dritte Gerade (Fig. 56).

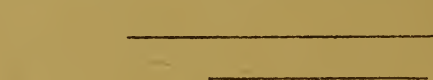


Fig. 56.

12) **Erklärung.** **Peripheriewinkel im Halbkreise** heißt ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie liegt, und dessen Schenkel durch die Endpunkte des Durchmessers gehen.

13) **Lehrsatz des Thales.***) Jeder Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter.

Vor. $AM = BM = CM$, $\angle AMB = 2R$ (Fig. 57).
Beh. $\angle ACB = R$.

*) Thales von Milet, einer der sieben Weisen, 640—548 v. Chr.

Bew. Verbindet man C mit M, so ist

$$\left.\begin{aligned} \iota &= \varkappa \\ \text{und } \lambda &= \mu \end{aligned}\right\} \text{(Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck; § 15, 5),}$$

folglich ist $\iota + \lambda = \varkappa + \mu$ (Gl. zu Gl. addiert . . . .)
oder $\angle ACB = \varkappa + \mu$.

Da nun die drei Winkel ACB, $\varkappa$ und μ des Dreiecks ACB zusammen 2R betragen (§ 14, 6), so muß offenbar $\angle ACB = R$ sein.

Zusatz. Unter allen Sehnen des Kreises ist der Durchmesser die größte (dies folgt aus § 14, 3, wenn nach den Endpunkten einer beliebigen Sehne die Radien gezogen werden).

Anmerkung. Als Dreiecksatz ausgesprochen lautet der Satz des Thales: Ist in einem Dreieck der Mittelpunkt einer Seite gleich weit entfernt von den drei Ecken, so ist der Gegenwinkel dieser Seite ein Rechter. — Umkehrung. Im rechtwinkligen Dreieck ist der Mittelpunkt der Hypotenuse gleich weit entfernt von den drei Ecken.

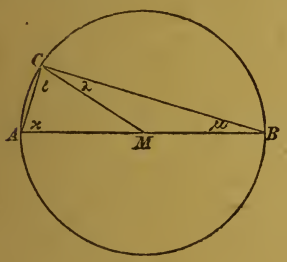


Fig. 57.

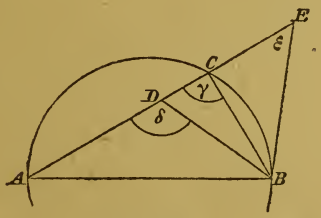


Fig. 58.

14) **Ort VI.** Der Ort für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen Strecke gehen, ist der über dieser Strecke als Durchmesser beschriebene Kreis. (Umkehrung von 13, Lehrs.)

Daß (Fig. 58) $\delta > R(\gamma)$, und $\varepsilon < R(\gamma)$ ist, folgt aus § 14, 5, Folg.

§ 19. Merkwürdige Linien und Punkte des Dreiecks.

1) **Lehrsatz.** Zieht man durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite die Parallele zu einer zweiten Seite, so halbiert diese Gerade die dritte Seite und ist gleich der Hälfte der zweiten.

Vor. $AE = EB$, $EF \parallel BC$ (Fig. 59).

Beh. $AF = CF$, $EF = \frac{BC}{2}$.

Bew. Zieht man noch FG parallel zu AB und AU parallel zu BC, so ist $AB = GU$ (§ 18, 6)

$AE = BE = FU = FG$

$\triangle AFU \cong CFG$ (II), also

$AF = CF$.

Ferner ist $AU = CG$

und $AU = EF = BG$ (§ 18, 6),

folglich $EF = \frac{BC}{2}$.

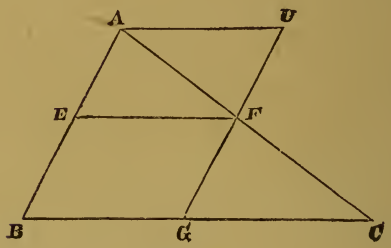


Fig. 59.

2) Lehrsatz (Umkehrung des vorigen). Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist parallel der dritten Seite und gleich der Hälfte derselben.

Vor. $AE = BE$, $AF = CF$ (Fig. 59).

Beh. $EF \parallel BC$, $EF = \frac{BC}{2}$.

Bew. Zieht man FG und AU wie bei 1),

so ist $\triangle AFU \cong \triangle CFG$ (II),

also $FU = FG$

und $AU = CG$.

Ferner ist $AB = GU$ und $AU = BG$ (§ 18, 6),

also auch $AE = BE = FU = FG$,

und da auch $AE \parallel FU$ ist,

so ist $\triangle AFE \cong \triangle AFU$ (I),

folglich $\angle AFE = \angle FAU$, $EF = AU$ } als gleichliegende Stücke.

Daraus folgt, daß

$EF \parallel AU \parallel BC$

und $EF = AU = BG = CG = \frac{BC}{2}$ ist.

Anmerkung. Der Lehrsatz 2 ist als Umkehrung des Lehrsatzes 1 dadurch entstanden, daß die zweite Voraussetzung mit der ersten Behauptung vertauscht ist (vgl. § 12, 6).

Zusatz. Die Verbindungslinien der Halbierungspunkte der drei Seiten eines Dreiecks teilen das Dreieck in vier kongruente Dreiecke; also schneidet jede den vierten Teil des Dreiecks ab.

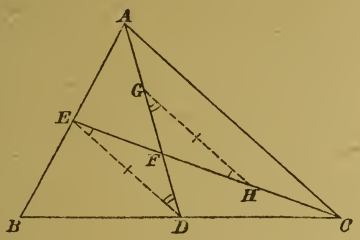


Fig. 60.

3) **Erklärung.** Mittellinie im Dreieck heißt die Verbindungslinie einer Ecke mit der Mitte der Gegenseite.

Jedes Dreieck hat drei Mittellinien.

Schneiden einander zwei Mittellinien im Dreieck, so heißt derjenige Abschnitt einer jeden der obere, der von der Ecke ausgeht; der bis zur Mitte der Gegenseite reichende ist der untere.

4) **Lehrsatz.** Zwei Mittellinien im Dreieck schneiden einander so, daß der obere Abschnitt einer jeden doppelt so groß ist, wie ihr unterer Abschnitt.

Vor. $BD = DC$, $AE = EB$ (Fig. 60).

Beh. $AF = 2FD$, $CF = 2FE$.

Bew. Man halbiere AF in G, CF in H und ziehe ED und GH. Wendet man dann auf das Dreieck BAC mit ED und auf das Dreieck FAC mit GH nacheinander den Lehrsatz 2 an, so erhält man:

$$ED \parallel AC, \qquad ED = \frac{AC}{2}$$

und

$$GH \parallel AC, \qquad GH = \frac{AC}{2};$$

folglich ist $ED \parallel GH$ (§ 12, 12) und $ED = GH$ (Sind zwei Größen . . .).

Also ist $\triangle DFE \cong \triangle GFH$ (II), da $ED = GH$, $\angle DEF = \angle GHF$ und $\angle EDF = \angle HGF$ ist (Wechselwinkel an Parallelen; § 12, 5, b). Aus dieser Kongruenz folgt,

daß $FD = FG$ ist. Da aber auch $FG = AG$ ist (n. d. Konstr.), so ist $AF = 2FD$.

Aus derselben Kongruenz folgt, daß $FE = FH$ ist. Da aber $FH = HC$ ist (n. d. Konstr.), so ist auch $CF = 2FE$.

5) **Lehrsatz.** Die drei Mittellinien im Dreieck schneiden einander in einem Punkte.

Vor. $AF = FB$, $AE = EC$, $BD = DC$ (Fig. 61).

Beh. BE und CF gehen durch denselben Punkt S von AD.

Bew. Da nach 4) sowohl BE als auch CF auf AD, von A aus gerechnet, $\frac{2}{3}AD$ abschneiden, so müssen sie durch denselben Punkt S von AD gehen.

Der Schnittpunkt der drei Mittellinien heißt aus physikalischen Gründen **Schwerpunkt** des Dreiecks.

6) **Erklärung. Winkelhalbierende** im Dreieck heißt die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels.

Jedes Dreieck hat drei Winkelhalbierende.

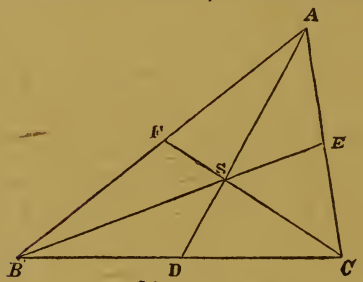


Fig. 61.

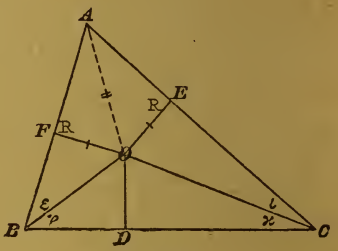


Fig. 62.

7) **Lehrsatz.** Die drei Winkelhalbierenden im Dreieck schneiden einander in einem Punkte.

Vor. $\varepsilon = \varphi$, $\iota = \varkappa$ (Fig. 62).

Beh. Die Halbierungslinie des Dreieckswinkels BAC geht durch den Schnittpunkt O der Winkelhalbierenden BO und CO.

Bew. Man fälle von O die drei Lote OD, OE und OF auf die Dreiecksseiten und verbinde O mit A.

Dann ist $OE = OD$
und $OF = OD$ } (§ 18, 9),
folglich $OE = OF$ (Sind zwei Größen ....).

Da ferner $OA = OA$
$\angle OEA = \angle OFA$ (als Rechte),
so ist $\triangle AEO \cong \triangle AFO$ (IV);
folglich ist auch $\angle OAE = \angle OAF$.

Die Verbindungslinie OA halbiert also den Winkel BAC oder (da jeder Winkel nur eine Halbierungslinie hat,) die Halbierungslinie des Winkels BAC geht durch den Schnittpunkt O von BO und CO.

Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden ist von den drei Seiten gleich weit entfernt.

Die weitere Bedeutung dieses Punktes wird in § 24, 9 angegeben und erläutert.

8) **Lehrsatz.** Die drei Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks schneiden einander in einem Punkte.

Vor. $AF = FB$, $FM \perp AB$, $AE = EC$, $EM \perp AC$, $BD = DC$ (Fig. 63).

Beh. Die Mittelsenkrechte der Seite BC geht durch den Schnittpunkt M von FM und EM.

Bew. Man verbinde M mit den drei Ecken A, B und C des Dreiecks und mit D.

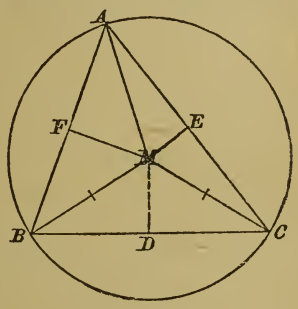


Fig. 63.

Dann ist $MB = MA$
und $MC = MA$ } (§ 18, 4),

folglich ist $MB = MC$ (Sind 2 Größen . . . .),

d. h. BMC ist ein gleichschenkliges Dreieck. Also muß MD auf seiner Grundseite senkrecht stehen (§ 16, 3).

Da $MA = MB = MC$ ist, so kann um den Mittelpunkt M ein Kreis beschrieben werden, der durch die drei Ecken des Dreiecks geht.

Erklärung. Umgeschriebener Kreis (Umkreis) des Dreiecks heißt der Kreis, der durch die drei Ecken des Dreiecks geht. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten.

Zusatz. Der Punkt M liegt im Dreieck, auf seinem Umfange oder außerhalb des Dreiecks, je nachdem das Dreieck spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig ist. Denn, wenn $\angle BAC < R$, so ist

$$BAC + ABM + ACM = 2BAC < 2R,$$

also liegt M innerhalb des Dreiecks ABC.

Ist aber $\angle BAC > R$, so ist

$$BAC + ABM + ACM = 2BAC > 2R,$$

also liegt M außerhalb des Dreiecks ABC.

Ist endlich $\angle BAC = R$, so ist

$$BAC + ABM + ACM = 2BAC = 2R,$$

also liegt M auf BC.

9) **Erklärung.** Höhe im Dreieck heißt das von einer Ecke auf die Gegenseite gefällte Lot.

Jedes Dreieck hat drei Höhen.

10) **Lehrsatz.** Die drei Höhen des Dreiecks schneiden einander in einem Punkte.

Vor. $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$ (Fig. 64).

Beh. AD, BE und CF schneiden einander in einem Punkte

Bew.*) Man ziehe durch die drei Ecken des Dreiecks ABC die Parallelen zu den Gegenseiten, die einander in I, K und L schneiden. Dann ist $AI = BC$ und $AK = BC$ } (§ 18, 6),

folglich ist $AI = AK$ (Sind zwei Größen ....).

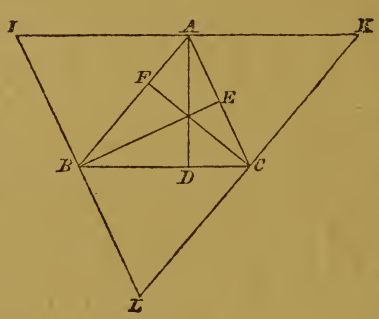


Fig. 64.

Da ferner $AD \perp BC$ (Vor.) und $BC \parallel IK$ ist (Konstr.), so ist auch $AD \perp IK$ (§ 12, 11). Also ist im Dreieck IKL die Gerade AD die Mittelsenkrechte der Seite IK. Genau ebenso zeigt man, daß BE die Mittelsenkrechte der Seite IL, und daß FC die Mittelsenkrechte der Seite KL ist. Folglich schneiden einander AD, BE und CF (nach 8, Lehrs.) in einem Punkte.

Der Schnittpunkt der drei Höhen liegt im Dreieck, auf einer Ecke oder außerhalb desselben, je nachdem das Dreieck spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig ist; was mit 8, Zusatz leicht zu zeigen ist.

11) Im weiteren Sinne des Wortes heißen nicht nur die drei Seiten und die drei Winkel (§ 14, 1), sondern auch andere Strecken und Winkel im Dreieck Stücke desselben (z. B. die Höhen, die Mittellinien, die von diesen miteinander oder mit den Dreiecksseiten gebildeten Winkel u. s. w.).

Solche Stücke heißen in kongruenten Dreiecken entsprechend oder homolog (§ 15, 1), wenn sie für entsprechende Seiten und Winkel der Dreiecke durch dieselbe Konstruktion erhalten worden

*) Dieser Beweis ist gegeben von dem Mathematiker Karl Friedrich Gauß, geb. 1777 in Braunschweig, gest. 1855 als Professor in Göttingen (in Carnots Geometrie der Stellung, übers. von Schumacher, 1810 — auch Ges. Werke Bd. IV S. 396).

sind, z. B. die Halbierungslinien homologer Winkel (§ 15, 1), die Mittellinien, die homologe Seiten (§ 15, 1) halbieren, u. s. w.

Entsprechende (homologe) Stücke kongruenter Dreiecke sind einander gleich.*)

Die Anmerkung zu § 17, 12 gilt nicht nur für die Seiten und Winkel, sondern für alle Stücke eines Dreiecks.

Dritter Abschnitt. Sätze über Vierecke.

§ 20. Von den Parallelogrammen.

1) **Erklärung.** **Parallelogramm** heißt ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind.

Höhe eines Parallelogramms heißt der Abstand zweier Gegenseiten.

2) **Lehrsätze.** a. Jedes Parallelogramm wird durch jede Diagonale (§ 13, 5) in zwei kongruente Dreiecke zerlegt.

Vor. (zu den Lehrsätzen a, b, c). $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$. BD ist gezogen (Fig. 65).

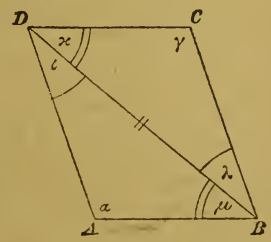


Fig. 65.

Beh. $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

Bew. S. den Beweis zu § 18, 6.

b. In jedem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich.

Beh. $AB = DC$, $AD = BC$.

Bew. S. den Beweis zu § 18, 6.

c. In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Beh. $\angle ABC = \angle ADC$, $\alpha = \gamma$.

Bew. Da $\left.\begin{matrix} \iota = \lambda \\ \text{und } \varkappa = \mu \end{matrix}\right\}$ (Wechselwinkel an Parallelen; §12,5,b) ist, so ist auch $\iota + \varkappa = \lambda + \mu$ (Gl. zu Gl. addiert . . . .) oder $\angle ABC = \angle ADC$.

Aus der Kongruenz der Dreiecke ABD und CDB folgt ferner, daß $\alpha = \gamma$ ist.

---

*) Dieser und die späteren gesperrt gedruckten Sätze enthalten Erweiterungen, die mit Hilfe früherer Sätze zu beweisen sind (der vorliegende für die einzelnen Stücke mit Hilfe der Kongruenzsätze).

3) Lehrsatz (erste Umkehrung von 2, b). Sind in einem Viereck die Gegenseiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Vor. $AB = DC$, $AD = BC$ (Fig. 66).

Beh. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Bew. Zieht man die Diagonale BD, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke ABD und CDB (III), daß $\varkappa = \mu$ ist; folglich ist $AB \parallel DC$ (§ 12, 7).

Genau ebenso folgt aus der Kongruenz, daß $\iota = \lambda$, folglich $AD \parallel BC$ ist.

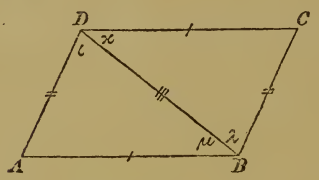


Fig. 66.

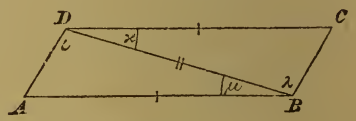


Fig. 67.

4) Lehrsatz (zweite Umkehrung von 2, b). Sind in einem Viereck zwei Gegenseiten einander gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

Vor. $AB = CD$, $AB \parallel CD$ (Fig. 67).

Beh. $AD \parallel BC$, $(AD = BC)$.

Bew. Zieht man die Diagonale BD, so folgt aus der Kongruenz von $\triangle ABD$ und $\triangle CDB$ (I), daß $\iota = \lambda$ ist, und hieraus, daß $AD \parallel BC$ (§ 12, 7) ist.

5) Lehrsatz (Umkehrung von Lehrsatz 2, c). Sind in einem Viereck die gegenüberliegenden Winkel einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.

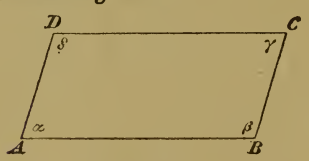


Fig. 68.

Vor. $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ (Fig. 68).

Beh. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Bew. Da $\left.\begin{matrix}\alpha = \gamma \\ \text{und } \delta = \beta\end{matrix}\right\}$ (Vor.) ist, so ist $\alpha + \delta = \gamma + \beta$ (Gl. zu Gl. addiert . . .).

Da nun $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$ ist (§ 14, 9), so muß $\alpha + \delta = 2R$ sein.

Daraus folgt aber, daß $AB \parallel CD$ ist (§ 12, 7).

Ebenso beweist man mit Hilfe der Gleichung $\alpha + \beta = 2R$, daß $AD \parallel BC$ ist.

6) **Lehrsatz.** In jedem Parallelogramm halbieren einander die Diagonalen.

Vor. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, $\angle AEC = \angle BED = 2R$ (Fig. 69).

Beh. $AE = EC$, $BE = ED$.

Bew. Aus der Kongruenz der Dreiecke AEB und CED (II) folgt: $AE = EC$, $BE = ED$.

Zusatz. Jede andere durch den Schnittpunkt der Diagonalen gehende Gerade (z. B. die Höhe des Parallelogramms) wird in diesem Punkte halbiert (was leicht durch Kongruenz zu beweisen ist).

7) **Lehrsatz** (Umkehrung von Lehrsatz 6). Halbieren einander in einem Viereck die Diagonalen, so ist es ein Parallelogramm.

Vor. $AE = EC$, $BE = ED$, $\angle AEC = \angle BED = 2R$ (Fig. 70).

Beh. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Bew. Aus der Kongruenz der Dreiecke AED und BEC (I) folgt, daß $AD = CB$ und $\iota = \varkappa$, also $AD \parallel CB$ (§ 12, 7) ist; folglich ist ABCD ein Parallelogramm (nach 4, Lehrs.).

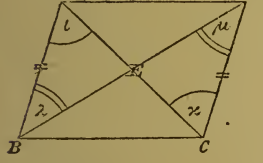


Fig. 69.

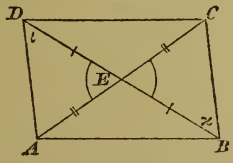


Fig. 70.

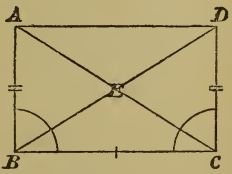


Fig. 71.

8) **Lehrsatz.** Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein Rechter, so sind alle Winkel Rechte.

Der Beweis folgt aus § 12, 11.

9) **Lehrsatz.** Sind in einem Parallelogramm zwei aneinanderstoßende Seiten einander gleich, so sind alle Seiten einander gleich.

Der Beweis folgt aus 2, b.

10) **Einteilung der Parallelogramme.** Die Parallelogramme teilt man

1. **nach ihren Seiten:** in ungleichseitige und gleichseitige,
2. **nach ihren Winkeln:** in schiefwinklige und rechtwinklige.

Rechteck heißt ein rechtwinkliges Parallelogramm. **Rhombus** heißt ein gleichseitiges Parallelogramm. **Quadrat** heißt ein gleichseitig-rechtwinkliges Parallelogramm.

11) **Lehrsatz.** Im Rechteck sind die Diagonalen einander gleich.

Vor. $AB \#$*) DC, $\angle ABC = R$ (Fig. 71).

---

*) $\#$ bedeutet: gleich und parallel.

Beh. $AC = DB$.

Bew. Da $BC = BC$, $AB = DC$ (nach 2, b), und $\angle ABC = \angle BCD$ (als Rechte) ist, so ist $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (I); folglich ist $AC = DB$.

Anmerkung. Um ein Rechteck läßt sich stets ein Kreis beschreiben (Fig. 72). Dagegen läßt sich nicht um jedes Parallelogramm ein Kreis beschreiben.

12) Lehrsatz (Umkehrung des vorigen). Sind in einem Viereck die Diagonalen einander gleich und halbieren sie einander, so ist es ein Rechteck.

Vor. $MA = MB = MC = MD$ (Fig. 72).

Beh. $AB \parallel DC$, $\angle ABC = R$.

Bew. Vgl. § 18, 13.

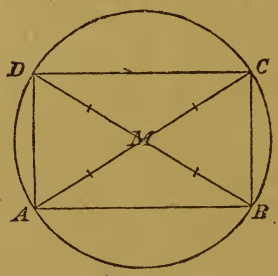


Fig. 72.

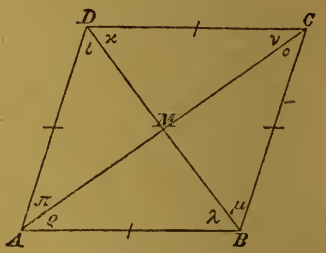


Fig. 73.

13) Lehrsatz. Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren die Winkel des Rhombus.

Vor. $AB = BC = CD = DA$ (Fig. 73).

Beh. $AC \perp BD$, $\iota = \varkappa$, $\lambda = \mu$, $\nu = o$, $\pi = \varrho$.

Bew. Vgl. § 16, 5.

Anmerkung. Der Schnittpunkt der Diagonalen im Rhombus ist gleich weit entfernt von den vier Seiten, oder auch:
Die Höhen eines Rhombus sind einander gleich.

14) Lehrsatz (Umkehrung des vorigen). Stehen in einem Viereck die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren sie einander, so ist das Viereck ein Rhombus.

Man beweise zuerst, daß das Viereck ein Parallelogramm ist (nach 7), darauf (mit Hilfe des ersten Kongruenzsatzes), daß zwei aneinanderstoßende Seiten einander gleich sind.

§ 21. Vom Trapez.

1) Erklärung. Trapez heißt ein Viereck, in dem zwei Gegenseiten parallel sind. Die beiden parallelen Seiten heißen Grundseiten, die beiden nicht parallelen Seiten heißen Schenkel des Trapezes.

2) Lehrsatz. Zieht man durch die Mitte des einen Schenkels eines Trapezes die Parallele zu einer der Grundseiten (vgl. § 12, 12), so halbiert diese Gerade den andern Schenkel und ist gleich der halben Summe der Grundseiten (vgl. § 19, 1).

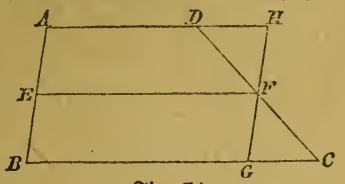


Fig. 74.

Vor. $AD \parallel BC$, $AE = EB$, $\angle AEB = 2R$, $EF \parallel BC$, $\angle CFD = 2R$ (Fig. 74).

Beh. I. $DF = FC$, II. $EF = \frac{AD + BC}{2}$.

Bew. I. Man ziehe FG parallel zu AB und verlängere GF und AD, bis die Verlängerungen einander in H schneiden. Dann ist $FG = EB$ und $FH = EA$ (§ 20, 2b), also $FG = FH$ (weil $EB = EA$ ist).

Folglich ist $\triangle FGC \cong FHD$ (II), also auch $DF = FC$.

II. Es ist ferner $EF = AH$ (§ 20, 2b) $= AD + DH$
und $EF = BG$ (§ 20, 2b) $= BC - GC$,
folglich $2EF = AD + BC + DH - GC$ (§ 43, 7).

Da nun wegen der oben gefundenen Kongruenz $DH = GC$ ist, so ergibt sich (§ 43, 2)

$2EF = AD + BC$

oder $EF = \frac{AD + BC}{2}$ (Gl. durch Gl. dividiert . . .).

3) Lehrsatz (Umkehrung des vorigen). Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Schenkel eines Trapezes ist parallel den Grundseiten und gleich der halben Summe derselben.

Vor. $AD \parallel BC$, $AE = EB$, $\angle AEB = 2R$, $DF = FC$, $\angle CFD = 2R$ (Fig. 74).

Beh. I. $EF \parallel BC$ ($\parallel AD$), II. $EF = \frac{AD + BC}{2}$.

Bew. I. Zieht man dieselben Hilfslinien (Fig. 74), so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke FDH und FCG (II), daß $FH = FG = \frac{HG}{2}$ ist; hieraus folgt ferner, daß $FG = EB$ ist; und da FG auch parallel EB ist, so ist auch $EF \parallel BC$ (§ 20, 4).

II. Die zweite Behauptung folgt dann aus 2).

4) **Erklärung. Gleichschenkliges (gerades) Trapez** heißt ein Trapez mit gleichen Schenkeln.

5) Lehrsatz. Im gleichschenkligen Trapez sind die einer Grundseite anliegenden Winkel einander gleich.

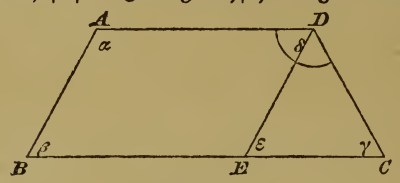


Fig. 75.

Vor. $AD \parallel BC$, $AB = DC$ (Fig. 75).

Beh. $\beta = \gamma$, $\alpha = \delta$.

Bew. Zieht man DE parallel zu AB, so ist

$DE = AB$ (§ 20, 2b);
ferner ist $DC = AB$ (Vor.),
folglich ist $DE = DC$ (Sind zwei Größen . . .).
Also ist $\gamma = \varepsilon$ (§ 15, 5);
da aber auch $\beta = \varepsilon$ ist (§ 12,5, a),
so ist $\gamma = \beta$.

Daß auch $\alpha = \delta$ ist, folgt daraus, daß $\alpha = 2R - \beta$ und $\delta = 2R - \gamma$ ist (§ 12,5, c).

6) Lehrsatz (Umkehrung des vorigen Lehrsatzes). Ein Trapez mit zwei gleichen Winkeln an einer Grundseite ist gleichschenklig.

Vor. $AD \parallel BC$, $\beta = \gamma$ (Fig. 75).

Beh. $AB = DC$.

Bew. Der Beweis ist mit derselben Hilfslinie DE und mit Benutzung von § 15, 6 leicht zu führen.

Weitere Lehrsätze.

7) Im gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen einander gleich.

8) (Umkehrung des vorigen). Ein Trapez mit gleichen Diagonalen ist gleichschenklig.

9) Um ein gleichschenkliges Trapez läßt sich stets ein Kreis beschreiben.

10) Jedes einem Kreise eingeschriebene Trapez ist gleichschenklig.

§ 22. Von den Vierecken.

1) Beispiele von Kongruenzsätzen für Vierecke.
   a. Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie in drei Seiten und den beiden von ihnen eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen.
   b. Zwei Vierecke sind kongruent, wenn sie in drei Winkeln und den beiden durch ihre Scheitel begrenzten Seiten übereinstimmen.
   Der Beweis wird geführt durch Aufeinanderlegen, wie in § 15, 3 und 4, oder auch mit Hilfe einer Diagonale, die die Vierecke in kongruente Dreiecke zerlegt.
2) Ein Viereck ist bestimmt durch fünf Stücke.
   Nach § 14, 9 ist durch drei Viereckswinkel der vierte bestimmt; mit den Winkeln sind also nur drei voneinander unabhängige Stücke gegeben.
   Ein Trapez ist bestimmt durch vier Stücke.
   Ein Parallelogramm und ein gleichschenkliges Trapez sind bestimmt durch drei Stücke.
   Ein Rechteck und ein Rhombus sind bestimmt durch zwei Stücke.
   Ein Quadrat ist bestimmt durch ein Stück.
3) Lehrsätze.
   a. Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks bilden die Ecken eines Parallelogramms.
   b. Die Mittelpunkte der Seiten eines Rechtecks bilden die Ecken eines Rhombus.
   c. Die Mittelpunkte der Seiten eines Rhombus bilden die Ecken eines Rechtecks.

Vierter Abschnitt. Kreissätze.

§ 23. Von den Sehnen des Kreises.

(Vgl. § 8, 5—6.)

1) Jede Sehne teilt die Kreisfläche in zwei Kreisabschnitte (Segmente).
   Ein **Kreisabschnitt** (Segment) wird begrenzt von einer Sehne und dem zugehörigen (kleineren oder größeren) Kreisbogen.
2) Ein Bogen mit den beiden Radien nach seinen Endpunkten schneidet aus der Kreisfläche einen Kreisausschnitt (Sektor) aus.

Ein **Kreisausschnitt** (Sektor) wird begrenzt von zwei Radien und dem zwischen ihnen liegenden (kleineren oder größeren) Kreisbogen.

Der Halbkreis kann sowohl als Kreisabschnitt wie als Kreisausschnitt betrachtet werden.

3) **Erklärung.** **Zentriwinkel** eines Kreises heißt ein Winkel, dessen Schenkel Radien sind (dessen Scheitel also das Zentrum des Kreises ist).

Zu jedem Zentriwinkel eines Kreises gehört eine bestimmte Sehne, ein bestimmter Bogen und ein bestimmter Sektor.

Der Sektor des Zentriwinkels von 90° heißt **Quadrant**, der des Zentriwinkels von 60° heißt **Sextant**.

Die Sehne des Sextanten ist gleich dem Radius, oder auch: Der Radius kann 6 mal hintereinander als Sehne in den Kreis eingetragen werden.

4) **Lehrsätze über die Sehne** (übereinstimmend mit den Lehrsätzen § 16, 1—4; Fig. 76).

a. Die Halbierungslinie eines Zentriwinkels geht durch die Mitte der zugehörigen Sehne und steht auf ihr senkrecht.

b. Das vom Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne gefällte Lot halbiert diese und den zugehörigen Zentriwinkel.

c. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes des Kreises mit der Mitte einer Sehne steht auf dieser senkrecht und halbiert den zugehörigen Zentriwinkel.

d. Das auf einer Sehne in ihrem Halbierungspunkte errichtete Lot geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Ort. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die durch zwei gegebene Punkte gehen, ist das Mittellot der Verbindungsstrecke der beiden Punkte (vgl. § 18, Ort II).

Fig. 76.

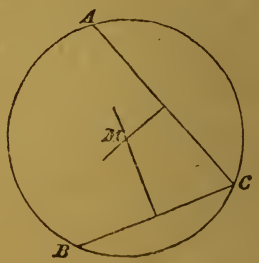


Fig. 77.

5) **Aufgabe.** Durch drei gegebene Punkte den Kreis zu legen.

Gegeben sind drei Punkte A, B und C (Fig. 77).

Konstr. Man errichte die Mittellote von AC und BC und beschreibe um ihren Schnittpunkt M den Kreis mit MA.

Beh. Dieser Kreis geht auch durch B und C.

Bew. Es ist $MA = MB = MC$ (§ 18, 4).

Anmerkungen. 1. Sind die drei Punkte A, B und C von vornherein miteinander verbunden, so lautet die gelöste Aufgabe in anderer Form: **Den umgeschriebenen Kreis** (Umkreis, vgl. § 19, 8) des Dreiecks ABC zu konstruieren — oder: Um das Dreieck ABC den Kreis zu beschreiben. Das Dreieck ABC heißt dem Kreise mit dem Mittelpunkte M **eingeschrieben** (vgl. § 24, 9).

2. Liegen die drei Punkte in einer Geraden, so kann kein Kreis durch sie gelegt werden (denn die beiden Lote schneiden einander nicht, sondern sind parallel; § 12, 10).

3. Durch vier Punkte kann im allgemeinen kein Kreis gelegt werden (Bedingungen dafür § 37, 5, 7) oder:

Ein Kreis ist vollständig bestimmt durch **drei** Punkte seiner Peripherie. (Zwei Kreise können einander nur in zwei Punkten schneiden; denn hätten sie drei Punkte gemeinsam, so würden sie zusammenfallen.)

6) **Erklärung.** Ein Vieleck heißt einem Kreise **eingeschrieben,** wenn seine Seiten Sehnen des Kreises sind (vgl. § 24, 9).

7) **Aufgabe.** Zu einem gegebenen Kreise (oder einem gegebenen Kreisbogen) den Mittelpunkt zu finden.

Gegeben ist ein Kreis (oder ein Kreisbogen) **ohne** den Mittelpunkt (Fig. 77).

Konstr. Man ziehe zwei Sehnen AC und BC und konstruiere ihre Mittelsenkrechten.

8) **Lehrsätze.**

a. Zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen, gleiche Sehnen, kongruente Ausschnitte und kongruente Abschnitte.

b. Zum doppelten Zentriwinkel gehört der doppelte Bogen und der doppelte Ausschnitt (aber nicht die doppelte Sehne oder der doppelte Abschnitt) und umgekehrt.

Zusatz. Zum n-fachen ebenso.

Bew. Durch Kongruenz der einzelnen, nebeneinander liegenden Ausschnitte.

Folgerungen. 1.) $b = \frac{u \cdot \gamma^0}{360^0}$ ist der zum Zentriwinkel γ^0 gehörende Bogen eines Kreises vom Umfang u (2 Umkehrungen).

2.) $A = \frac{F \cdot \gamma^0}{360^0}$ ist der zum Zentriwinkel γ^0 gehörende Ausschnitt eines Kreises vom Flächeninhalt F (2 Umkehrungen).

Z. B. Der kürzeste Weg zwischen 2 auf demselben Erdmeridian ($u = 40000$ km) liegenden Orten von den geographischen

Breiten $\beta_1 = 60°$ (Petersburg) und $\beta_2 = 51°$ (Kiew) beträgt $b = 40000 \cdot \frac{9}{360} = 1000$ km.

9) Lehrsatz. Gleiche Sehnen eines Kreises (oder gleicher Kreise) haben gleiche Abstände vom Mittelpunkte.

Vor. $AM = BM = CM = DM$. $AB = CD$, $ME \perp AB$, $MF \perp CD$ (Fig. 78).

Beh. $ME = MF$.

Bew. Man verbinde M mit A und C. Da $AB = CD$ ist, so ist auch $\frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$, also $AE = CF$ (4, Lehrs. b).

Da außerdem $MA = MC$ (nach der Vor.) und $\varepsilon = \varphi$ (als Rechte) ist, so ist $\triangle MEA \cong \triangle MFC$ (IV); folglich ist $ME = MF$.

10) Lehrsatz (Umkehrung des vorigen). Sehnen eines Kreises (oder gleicher Kreise) mit gleichen Abständen vom Mittelpunkte sind einander gleich.

Vor. $AM = BM = CM = DM$. $ME = MF$, $AB \perp ME$, $CD \perp MF$ (Fig. 78).

Beh. $AB = CD$.

Bew. Aus der Kongruenz der Dreiecke MEA und MFC (IV) folgt, daß $AE = CF$ ist. Also ist auch $2AE = 2CF$ oder $AB = CD$ (4, Lehrs. b).

Ort. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit gegebenem Radius r, die von einer gegebenen Geraden eine Sehne von der Länge s abschneiden, besteht aus zwei Parallelen zu dieser Geraden.

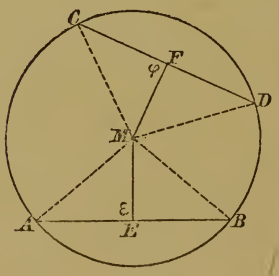


Fig. 78.

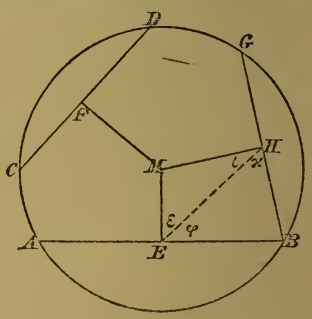


Fig. 79.

11) Lehrsatz. Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises (oder gleicher Kreise) hat die größere den kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Vor. $AM = BM = CM = DM$. $AB > CD$, $ME \perp AB$, $MF \perp CD$ (Fig. 79).

Beh. $ME < MF$.

Bew. Man trage CD von B aus als Sehne BG in den Kreis ein und fälle das Lot MH auf BG; dann ist

$$MF = MH \text{ (9, Lehrs.).}$$

Da nun $AB > BG$ ($BG = CD$) ist,

so ist auch $\frac{AB}{2} > \frac{BG}{2}$, also $BE > BH$ (4, Lehrs. b).

Folglich ist im Dreieck BEH

$$\varkappa > \varphi \text{ (§ 15, 7).}$$

Da nun $\angle MHB = \angle MEB$ (als Rechte)

und $\varkappa > \varphi$ ist,

so ist $\iota < \varepsilon$ (Ungleich. von Gleichem subtrahiert ....).

Folglich ist (im Dreieck MHE) $ME < MH$ (§ 15, 8), also auch $ME < MF$.

Ein einfacherer Beweis ohne Hilfskonstruktion ist später möglich mit Benutzung von § 34, 3 Folg.

12) Lehrsatz (Umkehrung des vorigen). Von zwei Sehnen eines Kreises (oder gleicher Kreise) mit ungleichen Abständen vom Mittelpunkte ist diejenige die größere, die den kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat.

Vor. $AM = BM = CM = DM$. $ME < MF$, $AB \perp ME$, $CD \perp MF$ (Fig. 79).

Beh. $AB > CD$.

Bew. Aus der Ungleichheit der Seiten ME und MH des Dreiecks MHE folgt zunächst, daß $\iota < \varepsilon$ ist, hieraus ferner, daß $\varkappa > \varphi$ ist. Folglich ist (im Dreieck BEH) $BE > BH$, also auch $2BE > 2BH$, d. h. $AB > BG$ oder auch $AB > CD$.

Der Durchmesser ist die größte Sehne, denn er hat den Abstand Null vom Mittelpunkte.

§ 24. Von den Tangenten des Kreises.

1) Dreht man eine Sekante AB um den Punkt B so, daß sie sich vom Mittelpunkte des Kreises entfernt (Fig. 80), so wird ihr Sehnenabschnitt immer kleiner (§ 23, 12); der Punkt A rückt dem Punkte B immer näher, bis er schließlich mit B zusammenfällt. Die Sekante AB ist dann zur Tangente geworden, sie berührt den Kreis in B.

2) **Erklärung.** **Tangente** eines Kreises heißt jede Gerade, die mit der Peripherie nur **einen** Punkt gemein hat.

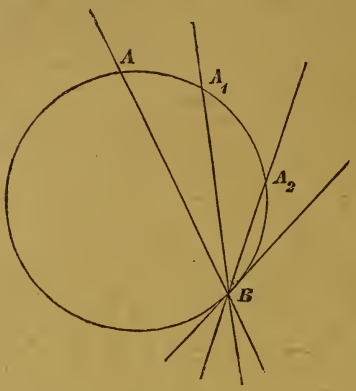


Fig. 80.

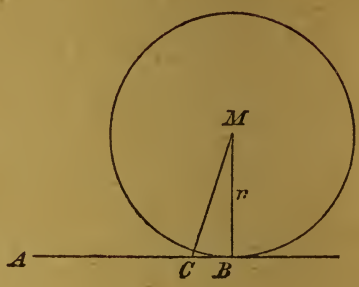


Fig. 81.

3) **Lehrsatz.** Das auf einem Radius in seinem Endpunkte errichtete Lot ist eine Tangente des Kreises.

Bew. Nach § 15, 8 Folg. 2 ist die Entfernung MC (Fig. 81) jedes Punktes C der Geraden AB größer als MB (r); also liegt kein Punkt der Geraden AB (außer dem Punkte B) auf der Kreisperipherie (§ 8, 5; vgl. auch § 18, 2).

Anmerkung. Jede durch B gehende Gerade, die auf BM **nicht** senkrecht steht, **schneidet** den Kreis (ist eine Sekante). Denn da das von M auf sie gefällte Lot kleiner als MB (r) ist, so liegt der Fußpunkt dieses Lotes innerhalb des Kreises.

Örter. 1. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, ist das in diesem Punkte auf der Geraden errichtete Lot.

2. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit dem gegebenen Radius r, die eine gegebene Gerade berühren, besteht aus den beiden im Abstande r zu der Geraden gezogenen Parallelen (§ 18, Ort III).

4) **Aufgabe.** In einem gegebenen Punkte (B) der Peripherie die Tangente an den Kreis zu ziehen.

Die Konstruktion ist mit Benutzung von 3, Lehrs. auszuführen.

5) **Lehrsatz** (Umkehrung von 3). Der Radius nach dem Berührungspunkte einer Tangente steht auf ihr senkrecht.

Bew. Jede Gerade, die auf MB in B nicht senkrecht steht, ist eine Sekante.

6) Lehrsatz (Umkehrung von 3, Lehrs. oder von 5, Lehrs.). Das vom Mittelpunkte des Kreises auf eine Tangente gefällte Lot trifft diese im Berührungspunkte.

Dies folgt unmittelbar aus 3) oder 5), da man von einem Punkte auf eine Gerade nur ein Lot fällen kann (§ 14, 6 Folg. 3).

7) Lehrsatz (andere Umkehrung von 3, Lehrs. oder auch von 5, Lehrs.). Das auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkte errichtete Lot geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Dies folgt unmittelbar aus 3) oder 5), da man in einem Punkte auf einer Geraden nur ein Lot errichten kann.

Anmerkung. Sind zwei Tangenten eines gegebenen Kreises nebst ihren Berührungspunkten gegeben, so kann man den Mittelpunkt finden, indem man in den Berührungspunkten auf den Tangenten die Lote errichtet.

8) Aufgabe. An einen gegebenen Kreis von einem gegebenen Punkte eine Tangente zu ziehen.

Gegeben ist ein Kreis um M und ein Punkt A außerhalb des Kreises (Fig. 82).

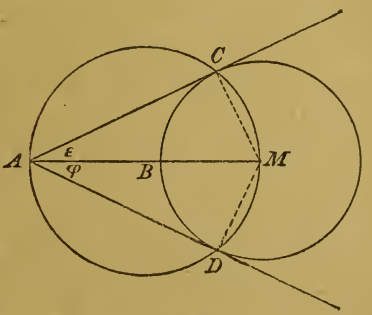


Fig. 82.

Konstr. Man ziehe AM, zeichne über AM als Durchmesser den Kreis, der den gegebenen Kreis in C (und D) schneidet, und ziehe AC (bezw. AD).

Beh. AC (und AD) ist eine Tangente des Kreises um M.

Bew. Zieht man noch CM (und DM), so ist $\angle$ ACM (und $\angle$ ADM) ein Rechter (Satz des Thales; § 18, 13); also ist CA (und DA) eine Tangente (nach 3, Lehrs.).

Anmerkung. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises können an den Kreis stets zwei Tangenten gezogen werden.

Folgerungen. 1. Die beiden Tangentenabschnitte (bis zu den Berührungspunkten) sind einander gleich (AC = AD).

2. Der von den beiden Tangenten gebildete Winkel wird durch die Verbindungslinie des Punktes mit dem Mittelpunkte halbiert ($\varepsilon = \varphi$).

1 und 2 folgen aus der Kongruenz der Dreiecke ACM und ADM (IV).

Ort. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Gerade berühren, besteht aus den Halbierungslinien der Winkel, die die Geraden miteinander bilden (§ 18, Ort IV).

9) **Erklärung. Eingeschriebener Kreis (Inkreis)** des Dreiecks heißt der Kreis, der die drei Seiten berührt.

Aufgabe. Den eingeschriebenen Kreis (Inkreis) eines gegebenen Dreiecks zu konstruieren.

Gegeben ist das Dreieck ABC (Fig. 83).

Konstr. Man halbiere zwei Dreieckswinkel, β und γ, fälle vom Schnittpunkte O der Winkelhalbierenden das Lot OD auf BC und beschreibe den Kreis um O mit dem Radius OD.

Beh. AB, BC und AC sind Tangenten dieses Kreises.

Bew. Fällt man von O noch die Lote OE und OF auf die beiden anderen Seiten, so ist $OD = OE = OF$ (§ 19, 7); also muß der Kreis auch durch E und F gehen. Folglich sind die Seiten Tangenten (nach 3).

Das Dreieck ABC heißt dem Kreise **umgeschrieben** (vgl. § 23, 5).

Erklärung. Ein Vieleck heißt einem Kreis **umgeschrieben**, wenn seine Seiten Tangenten des Kreises sind (vgl. § 23, 6).

10) **Erklärung.** **Tangentenviereck** heißt ein Viereck, dessen vier Seiten Tangenten eines Kreises sind.

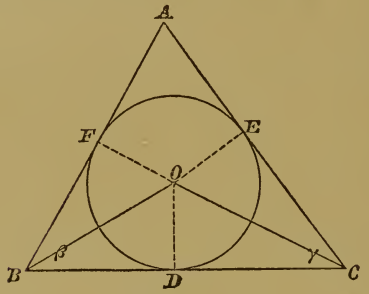


Fig. 83.

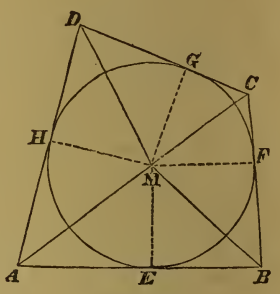


Fig. 84.

11) **Lehrsatz.** Im Tangentenviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen.

Vor. $ME = MF = MG = MH$

$\angle AHM = \angle DHM = \angle DGM = \angle CGM$

$= \angle CFM = \angle BFM = \angle BEM = \angle AEM = R$

(Fig. 84).

Beh. $AB + CD = AD + BC$.

Bew. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} AE &= AH \\ BE &= BF \\ CG &= CF \\ DG &= DH \end{aligned}\right\} \text{ (8, Folg. 1),}$$

folglich $\underbrace{AE + BE}_{AB} + \underbrace{CG + DG}_{CD} = \underbrace{AH + DH}_{AD} + \underbrace{BF + CF}_{BC}$ (§ 42, 2)

oder $AB + CD = AD + BC$.

Zusätze. 1. Jedes einem Kreise umgeschriebene Parallelogramm ist ein Rhombus.

2. Man erhält einen dem Kreise umgeschriebenen Rhombus, wenn man in den Endpunkten zweier Durchmesser die Tangenten an den Kreis zieht.

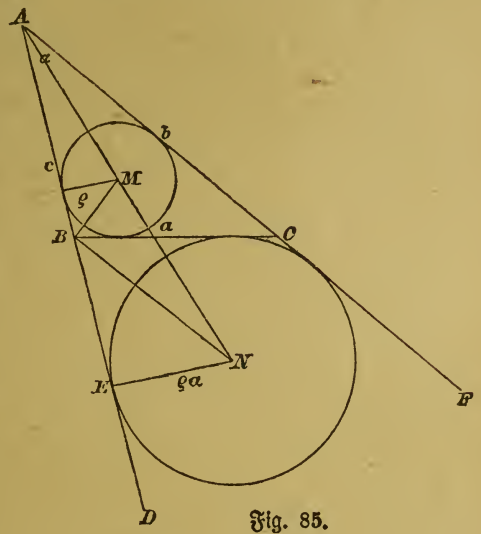


Fig. 85.

12) **Angeschriebener Kreis** (Ankreis, äußerer Berührungskreis) der Seite a des Dreiecks ABC heißt der Kreis, der die Seite a und die Verlängerungen der beiden anderen Dreiecksseiten berührt.

13) **Aufgabe.** Den der Seite a des Dreiecks ABC angeschriebenen Kreis (Ankreis der Seite a) zu konstruieren.

Gegeben ist das Dreieck ABC (Fig. 85).

Konstr. Man halbiere den Dreieckswinkel α und den Außenwinkel CBD, fälle vom Schnittpunkte N der beiden Winkelhalbierenden das Lot NE auf BD und beschreibe den Kreis um N mit NE.

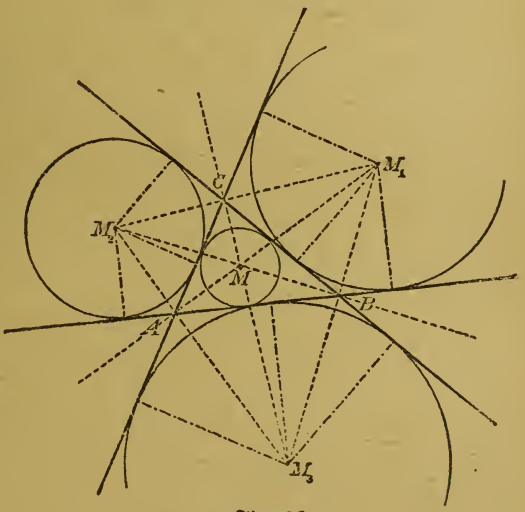


Fig. 86.

Beh. BC, BE und CF sind Tangenten dieses Kreises.

Bew. Er ist ebenso zu führen wie der Beweis zu 9).

Anmerkung. Jedes Dreieck hat also einen umgeschriebenen Kreis (§ 19, 8), dessen Radius man mit r, einen eingeschriebenen Kreis,

dessen Radius man mit ϱ, und drei **angeschriebene** Kreise (Fig. 86), deren Radien man mit ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c zu bezeichnen pflegt.

14) **Weitere Lehrsätze.**

1. Ist in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen, so kann in dasselbe ein Kreis beschrieben werden (Umkehrung von 11, indirekt zu beweisen).

2. In jeden Rhombus kann ein Kreis beschrieben werden (Umkehrung von 11, Zus. 1; vgl. auch § 20, 13 Anmerkung).

§ 25. Winkel im und am Kreise.

1) **Erklärung.** **Peripheriewinkel** heißt ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind.

Jeder Zentriwinkel (vgl. § 23, 3) und jeder Peripheriewinkel **steht auf dem Bogen**, durch dessen Endpunkte seine Schenkel gehen.

2) **Lehrsatz.** Ein Zentriwinkel ist doppelt so groß wie jeder Peripheriewinkel, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

Vor. $AC = BC = PC$ (Fig. 87, I, II, III).

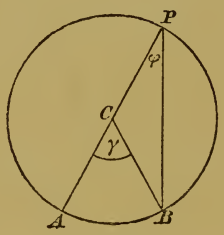


Fig. 87 I.

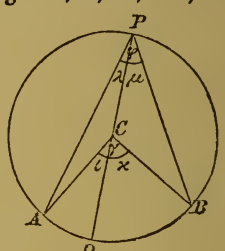


Fig. 87 IIa.

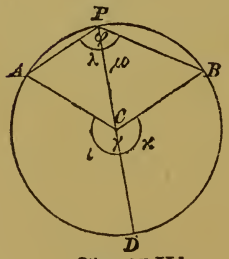


Fig. 87 IIb.

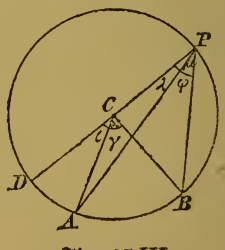


Fig. 87 III.

Beh. $\angle ACB = 2 \angle APB$ ($\gamma = 2\varphi$).

Bew. I. Ein Schenkel des Peripheriewinkels φ geht durch den Mittelpunkt C.

Als Außenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks CBP (§ 15, 5 Folg. 3) ist dann γ gleich 2φ.

II. Der Mittelpunkt C liegt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels φ.

Zerlegt man durch den Durchmesser PD den Zentriwinkel γ in die Winkel ι und $\varkappa$, den Peripheriewinkel φ in die Winkel λ und μ, so ist

$$\left.\begin{aligned}\iota &= 2\lambda\\ \varkappa &= 2\mu\end{aligned}\right\} \quad (\S\ 15,\ 5\ \text{Folg. 3}),$$

folglich $\iota + \varkappa = 2\lambda + 2\mu$ (Gl. zu Gl. addiert . . . .)

$= 2(\lambda + \mu)$ (§ 46, 4 Umkehr.),

d. h. $\gamma = 2\varphi$.

III. Der Mittelpunkt C liegt außerhalb des Peripheriewinkels φ.

Zieht man wieder den Durchmesser PD, so ist

$$\left.\begin{aligned}\varkappa &= 2\mu\\ \iota &= 2\lambda\end{aligned}\right\} \quad (\S\ 15,\ 5\ \text{Folg. 3}),$$

folglich $\varkappa - \iota = 2\mu - 2\lambda$ (Gl. von Gl. subtr. . . . .)

$= 2(\mu - \lambda)$ (§ 46, 4 Umkehr.),

d. h. $\gamma = 2\varphi$.

Folgerungen. 1. Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter (vgl. § 18, 13).

2. Alle Peripheriewinkel eines Kreises (oder gleicher Kreise) auf demselben Bogen oder auf gleichen Bögen sind einander gleich (und zählen halb so viel Grade wie der Zentriwinkel über demselben Bogen).

3. (Umkehrung von Folg. 2.) Zu gleichen Peripheriewinkeln eines Kreises (oder gleicher Kreise) gehören gleiche Bögen.

4. **Ort VII.** Der Ort der Scheitel aller Winkel von gegebener Größe φ, deren Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen Strecke gehen, ist ein über dieser Strecke als Sehne beschriebener Kreisbogen.

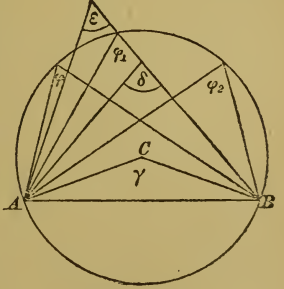


Fig. 88.

In Fig. 88 ist $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, dagegen $\varepsilon < \varphi$ und $\delta > \varphi$ (vgl. § 18, 14).

Wie ist bei gegebenem φ und AB dieser Kreisbogen zu konstruieren?

Konstruktion entweder mit Benutzung von 2) allein oder von 2, Folg. 2 (vgl. auch 8, Aufg.).

3) **Erklärung. Sehnenviereck** heißt ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind.

4) **Lehrsatz.** Im Sehnenviereck beträgt die Summe je zweier gegenüberliegender Winkel zwei Rechte.

Vor. $AM = BM = CM = DM$ (Fig. 89).

Beh. $\angle ABC + \angle ADC = 2R$

($\beta + \delta = 2R$, und ebenso $\alpha + \gamma = 2R$).

Bew. Verbindet man den Mittelpunkt mit A und C, so ist

$$\left.\begin{aligned} \iota &= 2\beta \\ \varkappa &= 2\delta \end{aligned}\right\} \quad \text{(Lehrs. 2)},$$

folglich $\iota + \varkappa = 2\beta + 2\delta$ (Gl. zu Gl. addiert ...)

$= 2(\beta + \delta)$ (§ 46, 4 Umkehr.),

d. h. $4R = 2(\beta + \delta)$

oder $2R = \beta + \delta$.

Daß dann auch $\alpha + \gamma = 2R$ ist, folgt sofort aus § 14, 9.

Zusätze. 1. Jedes einem Kreise eingeschriebene Parallelogramm ist ein Rechteck.

2. Man erhält ein dem Kreise eingeschriebenes Rechteck, wenn man die Endpunkte zweier Durchmesser miteinander verbindet.

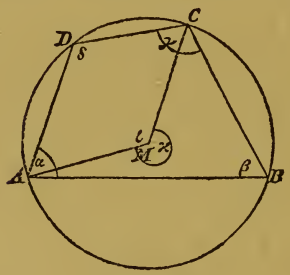


Fig. 89.

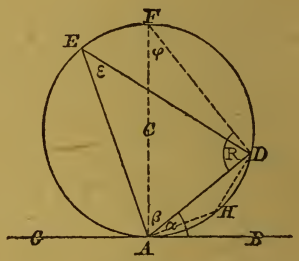


Fig. 90.

5) **Weitere Lehrsätze.**

1. Beträgt in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegender Winkel zwei Rechte, so kann um dasselbe ein Kreis beschrieben werden (Umkehrung von 4) — indirekt zu beweisen.

2. Um jedes Rechteck kann ein Kreis beschrieben werden (Umkehrung von 4, Zus. 1; s. § 20, 11 Anmerk.).

6) **Erklärung.** **Tangentensehnenwinkel** (oder auch Sehnentangentenwinkel) heißt der Winkel, den eine Tangente mit einer durch ihren Berührungspunkt gezogenen Sehne bildet.

7) **Lehrsatz.** Der Tangentensehnenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel im abgewendeten Kreisabschnitte.

Vor. $\angle CAB = \angle CAG = R$.
$AC = DC = FC = EC$.
$\angle ACF = 2R$ (Fig. 90).

Beh. $\angle DAB = \angle DFA = \angle DEA$ ($\angle DAG = \angle DHA$).

Bew. Da alle Peripheriewinkel über AD gleich sind, so genügt es nachzuweisen, daß $\angle DFA = \angle DAB$ ist.

Es ist $\angle CAB = R$ (§ 24, 5), also auch
$\alpha + \beta = R$;
ferner ist $\angle FDA = R$ (Satz des Thales),
also auch $\varphi + \beta = R$ (§ 14, 6);
folglich ist $\alpha + \beta = \varphi + \beta$ (Sind zwei Größen . . .)
und $\alpha = \varphi$ (Gl. von Gl. subtrah. . . .).

Da ferner $\angle DAG + \alpha = 2R$ (Nebenwinkel)
und $\angle DHA + \varepsilon = 2R$ (nach 4) ist,
so ist auch $\angle DAG + \alpha = \angle DHA + \varepsilon$
oder mit Berücksichtigung von $\alpha = \varepsilon$
$\angle DAG = \angle DHA$ (Gl. von Gl. subtr. . .).

8) **Aufgabe.** (Konstr. von Ort VII.) Den Ort für die Scheitel aller Winkel von gegebener Größe φ zu konstruieren, deren Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen Strecke AB gehen.

Gegeben sind die Strecke AB und der Winkel φ (Fig. 91).

Konstr. Man trage den Winkel φ in A an die Strecke AB an ($\angle BAC = \varphi$) und errichte das Lot in A auf dem freien Schenkel AC. Dann errichte man in D auf AB die Mittelsenkrechte. Um den Schnittpunkt M beider Lote beschreibe man den Kreis mit MA.

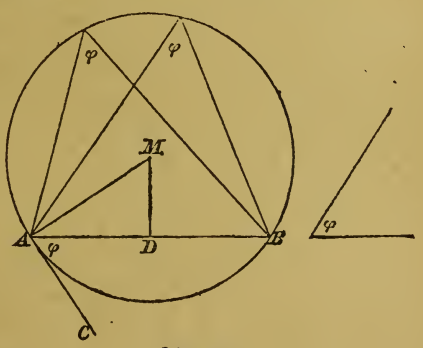


Fig. 91.

Beh. Der von dem Winkel BAC abgewendete (in Fig. 91 der größere) Bogen AB des Kreises um M ist der verlangte Ort.

Bew. Er folgt unmittelbar aus 7).

§ 26. Beziehungen zweier Kreise.

1) **Erklärung.** Zwei Punkte liegen gegen eine Gerade **symmetrisch**, wenn sie auf einem Lote zu der Geraden beiderseits gleich weit von der Geraden entfernt liegen.

2) **Erklärung.** Die **Zentrale** (oder Zentrallinie) zweier Kreise ist die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte.

3) **Lehrsatz.** Die Schnittpunkte zweier Kreise liegen symmetrisch zu ihrer Zentrale.

Vor. $AM = BM$, $AN = BN$, $\angle ACB = \angle MCN = 2R$ (Fig. 92).

Beh. $AB \perp MN$, $AC = BC$.

Bew. Er folgt unmittelbar aus § 16, 5).

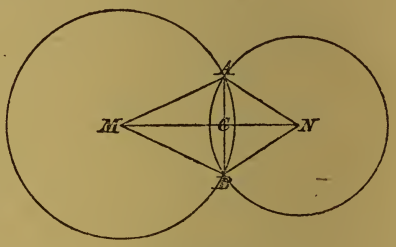


Fig. 92.

4) **Erklärung.** **Konzentrisch** heißen zwei Kreise, die denselben Mittelpunkt haben.

Exzentrisch heißen zwei Kreise, die nicht denselben Mittelpunkt haben und von denen der kleinere ganz innerhalb des größeren liegt.

Ort. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit gegebenem Radius r, die einen gegebenen Kreis so schneiden, daß die gemeinsame Sehne die Länge s hat, besteht aus zwei mit dem gegebenen konzentrischen Kreisen.

5) **Aufgabe.** An zwei gegebene Kreise die gemeinsamen (**äußeren** oder **inneren**) Tangenten zu ziehen.

Gegeben sind zwei Kreise mit den Mittelpunkten M und N und mit den Radien r und ϱ (Fig. 93, I und II).

I. **Konstruktion** der **äußeren** Tangenten.

Man beschreibe den Kreis um M mit $(r - \varrho)$, ziehe an ihn von N aus die beiden Tangenten (§ 24, 8), verbinde M mit den Berührungspunkten C und C′ und verlängere MC und MC′ bis zu den Schnittpunkten A

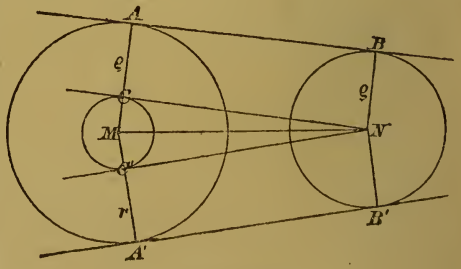


Fig. 93 I.

und A′ mit der Peripherie. Dann ziehe man NB parallel zu MA und NB′ parallel zu MA′ und verbinde A mit B und A′ mit B′.

II. **Konstruktion der inneren Tangenten.**

Man beschreibe um M den Kreis mit $(r + \varrho)$, ziehe an ihn von N aus die beiden Tangenten (§ 24, 8) und verbinde M mit den Berührungspunkten C und C′, wodurch auf der Peripherie des Kreises um M die Schnittpunkte A und A′ erhalten werden. Dann ziehe man NB parallel zu AM und NB′ parallel zu A′M und verbinde A mit B und A′ mit B′.

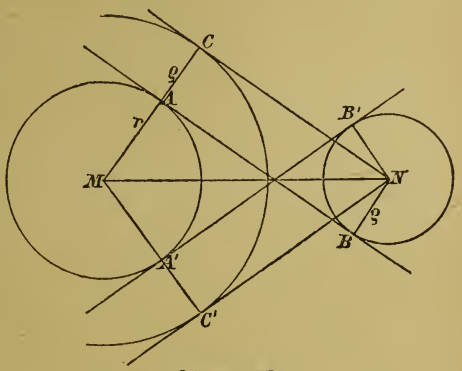


Fig. 93 II.

Beh. AB und A′B′ sind gemeinsame Tangenten der beiden gegebenen Kreise.

Bew. In Fig. I ist $AM = r$,

$MC = r - \varrho$,

also $AC = r - (r - \varrho)$ (Gl. von Gl. subtr..)

oder $AC = \varrho$.

In Fig. II ist $MC = r + \varrho$,

$MA = r$,

also ebenfalls $AC = \varrho$ (Gl. von Gl. subtr. . . .).

Da nun in beiden Figuren auch $NB = \varrho$ ist, so ist $AC = BN$ $(= \varrho)$; da aber nach der Konstruktion auch $AC \parallel BN$ ist, so ist ABNC ein Parallelogramm (§ 20, 4), es ist also auch $AB \parallel CN$.

Nun ist aber $CN \perp MC$ (§ 24, 5), also ist auch $AB \perp MC$ (§ 12, 11) und ebenso $AB \perp NB$.

Also ist AB (und ebenso A′B′) eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise (§ 24, 3).

Lehrsätze. 1. Die Abschnitte der (äußeren und inneren) gemeinsamen Tangenten zwischen den Berührungspunkten sind einander gleich $(AB = A'B')$.

2. Der Schnittpunkt der beiden äußeren Tangenten liegt auf der Verlängerung der Zentrale.

3. Der Schnittpunkt der beiden inneren Tangenten liegt auf der Zentrale.

Frage. Was läßt sich weiter über die gemeinsamen Tangenten aussagen, wenn die beiden Kreise gleich sind? Wie werden dann diese Tangenten einfacher zu konstruieren sein?

6) Ist die Zentrale MN zweier Kreise gleich der Summe der Radien, so haben die beiden Kreise nur eine innere Tangente; diese steht auf der Zentrale senkrecht (Fig. 94, I).

Ist die Zentrale MN zweier Kreise gleich der Differenz der Radien, so haben die beiden Kreise nur eine äußere Tangente; diese steht gleichfalls auf der Zentrale senkrecht (Fig. 94, II).

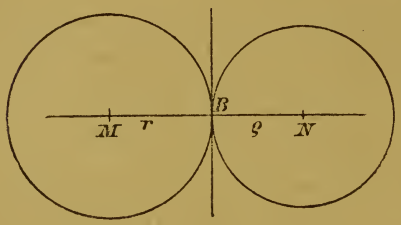


Fig. 94 I.

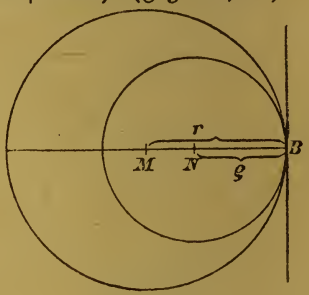


Fig. 94 II.

In beiden Fällen läßt sich beweisen, daß die beiden Kreise nur einen Punkt gemein haben.

7) Erklärung. Zwei Kreise berühren einander, wenn sie nur einen Punkt gemein haben.

8) Lehrsatz. Haben zwei Kreise einen Punkt der Zentrale [der Verlängerung der Zentrale] gemein, so berühren sie einander von außen [berührt der kleinere den größeren von innen].

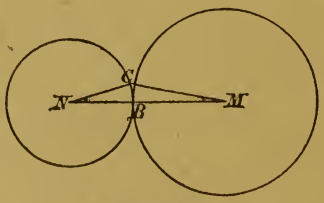


Fig. 95 I.

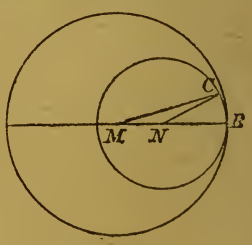


Fig. 95 II.

Vor. I. (Fig. 95, I.) $\angle MBN = 2\,R.$ $NB = NC.$
II. (Fig. 95, II.) $\angle MNB = 2\,R.$ $NB = NC.$

Beh. I. $MC > MB$. II. $MC < MB$.

Bew. I. Für den ersten Fall (Fig. 95, I) ist

$CM > MN - CN$ (§ 14, 4),

$CN = NB$ (als Radien desselben Kreises),

folglich $CM > MN - NB$ (Gl. v. Ungl. subtr. . .)

oder $CM > MB$, d. h. der Punkt C liegt **außerhalb** des Kreises um M (§ 8, 6) und **nicht** auf ihm.

II. Für den zweiten Fall (Fig. 95, II) ist

$CM < MN + CN$ (§ 14, 3),

$CN = NB$ (als Radien desselben Kreises),

folglich $CM < MN + NB$ (Gl. zu Ungl. addiert . . .)

oder $CM < MB$, d. h. der Punkt C liegt **innerhalb** des Kreises um M (§ 8, 6) und **nicht** auf ihm.

Ort. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreise mit dem Radius ϱ, die einen gegebenen Kreis mit dem Radius r (von außen oder von innen) berühren, besteht aus zwei mit dem gegebenen Kreise konzentrischen Kreisen, einem äußeren mit dem Radius $(r + \varrho)$ und einem inneren mit dem Radius $(r - \varrho)$.

Anmerkungen. 1. Ist die Zentrale größer als die Summe der Radien, so liegen die Kreise außerhalb einander.

2. Ist die Zentrale gleich der Summe der Radien (Fig. 95, I), so berühren die Kreise einander von außen.

3. Ist die Zentrale kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien, so schneiden die Kreise einander (Fig. 92).

4. Ist die Zentrale gleich der Differenz der Radien (Fig. 95, II), so berühren die Kreise einander von innen.

5. Ist die Zentrale kleiner als die Differenz der Radien, so liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des größeren.

9) **Lehrsatz (Umkehrung von 8).** Berühren zwei Kreise einander von außen [von innen], so geht die Zentrale [die Verlängerung der Zentrale] durch den Berührungspunkt.

Vor. I. $NB = NC$, $MB < MC$ (Fig. 96, I).

II. $NB = NC$, $MB > MC$ (Fig. 96, II).

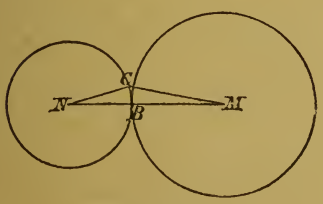


Fig. 96 I.

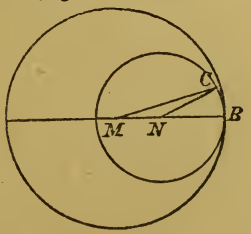


Fig. 96 II.

Beh. I. $\angle MBN = 2\,R.$
II. $\angle MNB = 2\,R.$

Bew. (indirekt). Man nehme an, MN oder ihre Verlängerung ginge nicht durch B, sondern schnitte den Kreis um N in einem anderen Punkte C (es wäre also MCN in Fig. 95 eine gerade Linie). Man verbinde dann B mit M und mit N (MBN in Fig. 96 wäre dann eine gebrochene Linie).

Dann wäre im ersten Falle (Fig. 96, I)

$MB + NB > MN$ (§ 14, 3),
$NB = NC$ (als Radien),
folglich $MB > MN - NC$ (Gl. von Ungl. subtr. . . . .),
oder $MB > MC$; der Punkt C müßte also (§ 8, 6) innerhalb des Kreises um M liegen, was der Voraussetzung widerspricht.

Im zweiten Falle wäre (Fig. 96, II)

$MB - NB < MN$ (§ 14, 4),
$NB = NC$ (als Radien),
folglich $MB < MN + NC$ (Gl. zu Ungl. addiert . . . .),
oder $MB < MC$; der Punkt C müßte also (§ 8, 6) außerhalb des Kreises um M liegen, was der Voraussetzung widerspricht.

Da somit die Annahme, MN (oder ihre Verlängerung) könnte den Kreis um N in einem anderen Punkte als B schneiden, auf einen Widerspruch mit der Voraussetzung führt, so muß sie falsch gewesen sein, demnach muß die Behauptung richtig gewesen sein. Also geht MN (oder ihre Verlängerung) durch den Berührungspunkt B.

Anmerkungen (die Umkehrungen der in den Anmerkungen zu Lehrsatz 10 enthaltenen Sätze).

1. Liegen zwei Kreise außerhalb einander, so ist die Zentrale größer als die Summe ihrer Radien.

2. Berühren zwei Kreise einander von außen (Fig. 96, I), so ist die Zentrale gleich der Summe ihrer Radien.

3. Schneiden zwei Kreise einander, so ist die Zentrale kleiner als die Summe und größer als die Differenz ihrer Radien.

4. Berühren zwei Kreise einander von innen (Fig. 96, II), so ist die Zentrale gleich der Differenz ihrer Radien.

5. Liegt ein Kreis ganz innerhalb eines anderen, so ist die Zentrale kleiner als die Differenz ihrer Radien.

Fünfter Abschnitt. Konstruktionsaufgaben. (Musterbeispiele und Hilfssätze.)

§ 27. Allgemeines über die Lösung von Konstruktionsaufgaben.

1) Vgl. § 17, 1.

2) Die **methodische Lösung einer planimetrischen Aufgabe** besteht aus folgenden Teilen:

   a) Die Analysis (Auflösung) setzt, ausgehend von der Betrachtung einer Figur, die als die geforderte angesehen wird, die gegebenen Bedingungen mit den übrigen Eigenschaften der Figur in Verbindung und sucht Punkte, Gerade oder Kreise, die unmittelbar zu konstruieren sind, oder Figuren zu finden, die auf bekannte Konstruktionen (Grundaufgaben, § 17, 2—12) zurückgeführt werden können.

   b) Die Konstruktion (Zeichnung) stellt diejenigen Punkte, Geraden, Kreise und Figuren wirklich durch Zeichnung dar, von denen die Analysis festgestellt hat, daß sie konstruiert werden können. Ihr Weg ist dem der Analysis entgegengesetzt.

   c) Der Beweis zeigt, daß das Ergebnis der Konstruktion den Bedingungen der Aufgabe entspricht, d. h. daß die gezeichnete Figur von der verlangten Art ist, und daß in ihr die gegebenen Stücke in der durch die Aufgabe bestimmten Bedeutung vorhanden sind.

   d) Die Determination (nähere Bestimmung) stellt fest, ob die Aufgabe allgemein lösbar ist oder nicht, ob mehrere Lösungen möglich sind und ob unter besonderen Bedingungen die Lösung der Aufgabe eine Abänderung erfährt; endlich wird auch untersucht, unter welchen Bedingungen die Lösung der Aufgabe unmöglich ist.

   e) Allem voran pflegt angegeben zu werden, welche Bedingungen (Stücke der Figur) gegeben sind (Voraussetzung), und welche Forderung die Aufgabe dazu stellt.

3) Damit eine **Konstruktionsaufgabe bestimmt**, d. h. so beschaffen ist, daß es nur eine Lösung oder eine endliche Zahl von Lösungen gibt, müssen die gegebenen Bestimmungsstücke

   a) der Zahl nach so viele sein, wie zur Kongruenz von Figuren der geforderten Art nötig sind. Um ein Dreieck zu konstruieren, sind also im allgemeinen drei Stücke, um ein Viereck zu

konstruieren, fünf Stücke notwendig. Aber für die Konstruktion eines Quadrats genügt ein, für die eines gleichschenkligen Dreiecks genügen zwei Stücke.

b) voneinander unabhängig sein, d. h. es dürfen nicht eines oder mehrere ihrer Größe nach durch die anderen schon bestimmt sein, wie das z. B. der Fall ist mit dem dritten Winkel eines Dreiecks, wenn die beiden anderen gegeben sind (vgl. § 17, 12 Anm.; § 22, 2).

4) Der Kürze des Ausdrucks wegen **bezeichnet man in dem Dreieck ABC**

die Seiten BC, AC, AB mit a, b, c,
die Winkel BAC, ABC, ACB mit α, β, γ,
die Höhen auf a, b, c mit h_a, h_b, h_c (§ 19, 9),
die Mittellinien mit m_a, m_b, m_c (§ 19, 3),
die Winkelhalbierenden mit w_α, w_β, w_γ (§ 19, 6),
den Radius des umgeschriebenen Kreises mit r (§ 19, 8),
den Radius des eingeschriebenen Kreises mit ϱ (§ 24, 9),
die Radien der den Seiten a, b, c angeschriebenen Kreise mit ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c (§ 24, 12),
die Abschnitte, in die der Fußpunkt der Höhe auf a die Seite a teilt, mit p und q,
die Abschnitte, in die w_α die Seite a teilt, mit u und v,
den Winkel zwischen a und m_a mit $\angle(a\,m_a)$ u. s. w.

§ 28. Methode der geometrischen Örter.

1) Zur Lösung einer planimetrischen Konstruktionsaufgabe gelangt man häufig durch Anwendung **geometrischer Örter** (vgl. § 18; § 23, 4, 10; § 24, 3, 8; § 25, 2; § 26, 8).

2) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Höhe auf sie und der Mittellinie nach ihr.

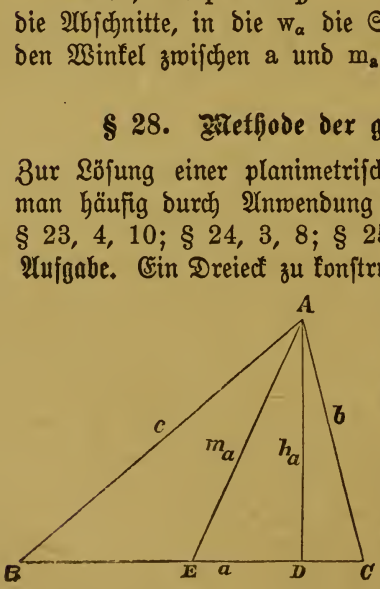


Fig. 97.

Gegeben sind die 3 Strecken a, h_a, m_a.

Gefordert ist ein Dreieck, in dem a eine Seite, h_a die Höhe auf ihr, m_a die Mittellinie nach ihr ist.

Analysis. Wäre ABC (Fig. 97) das verlangte Dreieck, so

müßte BC gleich a, das Lot AD von A auf BC gleich h_a und die Verbindungslinie von A mit dem Mittelpunkt E von BC gleich m_a sein.

Durch a sind die Punkte B und C und der Halbierungspunkt E bestimmt. Der Punkt A aber liegt auf der Parallelen zu BC im Abstande h_a und auf dem Kreise mit dem Mittelpunkte E und dem Radius m_a. Der Punkt A, also auch das Dreieck ABC, kann nun gezeichnet werden.

Konstruktion. Man zeichne die Strecke BC gleich a (Fig. 98), halbiere sie in E, beschreibe den Kreis um E mit dem Radius m_a, ziehe zu BC im Abstande h_a die Parallele, nenne ihren Schnittpunkt mit dem Kreise A, ziehe AB und AC, so ist das Dreieck ABC das verlangte.

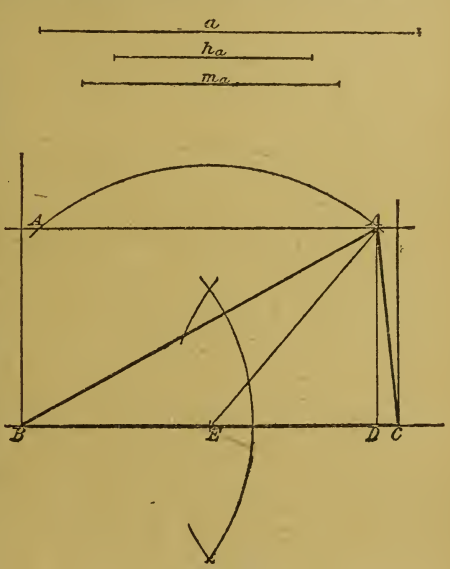


Fig. 98.

Beweis. ABC ist ein Dreieck, das nach der Konstruktion die Seite a (BC) enthält. Fällt man von A auf BC das Lot AD, so ist AD gleich h_a, weil A auf der Parallelen liegt, die im Abstande h_a zu BC gezogen ist; zieht man ferner AE, so ist diese Mittellinie gleich m_a, weil A auf dem Kreise liegt, der mit dem Radius m_a um E beschrieben ist.

Determination. Da die Parallele zu BC den Kreis um E im allgemeinen in zwei Punkten schneidet, so gibt es zwei Dreiecke ABC, die aber, weil sie kongruent sind, dieselbe Lösung bieten. Falls m_a gleich h_a ist, fallen die beiden Durchschnittspunkte in einem Berührungspunkte zusammen und es gibt nur ein Dreieck. Ist m_a kleiner als h_a, so schneidet der Kreis die Parallele nicht, es gibt keine Lösung der Aufgabe.

3) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Höhe auf eine andere Seite und der Mittellinie nach der dritten Seite.

Gegeben sind drei Strecken, a, h_b, m_c.

Gefordert ist ein Dreieck, in dem a eine Seite, h_b die Höhe auf einer anderen, m_c die Mittellinie nach der dritten Seite ist.

Analysis. Wäre ABC (Fig. 99) das verlangte Dreieck, so müßte BC gleich a, die Höhe BD gleich h_b, die Mittellinie CE gleich m_c sein.

Die Lage der Punkte B und C ist dann durch a bestimmt, die des Punktes A bleibt noch festzustellen. A liegt nun erstens auf der Tangente, die von C aus an den Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius h_b gelegt wird, zweitens auf der Verlängerung der Geraden BE, deren Richtung man kennt, sobald man die Lage von E bestimmt hat. E liegt aber einmal auf der Parallelen zu der Tangente CA, die man durch den Halbierungspunkt F von BC zieht, und dann auf dem Kreise, den man mit dem Radius m_c um den Mittelpunkt C beschreibt.

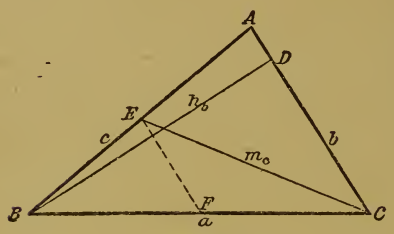


Fig. 99.

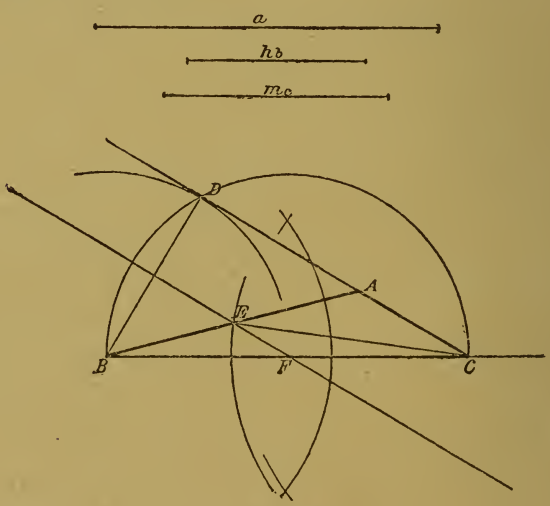


Fig. 100.

Konstruktion. Man zeichne BC gleich a (Fig. 100), beschreibe um B den Kreis mit dem Radius h_b, und um C den Kreis

mit dem Radius m_c. Von C aus lege man an den Kreis um B die Tangente CD und ziehe durch die Mitte F von BC die Parallele zu CD. Ihren Schnittpunkt mit dem Kreise um C nenne man E, ziehe BE und verlängere BE, bis CD in A getroffen wird. Dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. ABC ist ein Dreieck, das nach der Konstruktion die Seite c (BC) enthält. Ferner ist in ihm BD Höhe, weil nach der Konstruktion die Tangente CD in D auf BD senkrecht steht, und gleich h_b, weil der Kreis den Radius h_b hat. Endlich ist in ihm CE Mittellinie, weil nach der Konstruktion EF parallel AC durch die Mitte F von BC gezogen ist, und gleich m_c, weil E auf dem mit dem Radius m_c um den Mittelpunkt C beschriebenen Kreise liegt.

Determination. Die Gerade EF wird von der Kreislinie um C im allgemeinen zweimal geschnitten werden. Es gibt also zwei Punkte E, also auch zwei Punkte A, sodaß zwei Dreiecke der Forderung der Aufgabe genügen.

Im besonderen ergibt sich für

I. $h_b > a$, kein Dreieck.

II. $h_b = a$, 1) $m_c = \frac{1}{2}a$, eine gerade Linie,
2) $m_c < \frac{1}{2}a$, kein Dreieck.
3) $m_c > \frac{1}{2}a$, zwei kongruente Dreiecke.

III. $h_b < a$, 1) $m_c > \frac{1}{2}h_b$, zwei Dreiecke
($m_c = \frac{1}{2}a$, das eine Dreieck wird zur Geraden),
2) $m_c = \frac{1}{2}h_b$, ein Dreieck,
3) $m_c < \frac{1}{2}h_b$, kein Dreieck.

4) Weitere Aufgaben. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

1) c, m_c, α.	6) h_a, p, w_β.	11) h_a, m_a $\angle$ (cm_a).
2) c, h_a, h_b.	7) c, γ, m_c.	12) u, w_α, α.
3) c, γ, h_c.	8) p, q, m_b.	13) u, v, α.
4) b, β, h_c.	9) β, h_b, ϱ.	14) b, β, m_c.
5) h_a, w_α, p.	10) h_b, m_b, r.	15) β, w_β, ϱ.

§ 29. Methode der Reduktion.

1) Eine andere Methode für die Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben besteht darin, daß man aus den in der Figur der Analysis unmittelbar erkennbaren oder durch zweckmäßige Hilfs-

konstruktionen erreichbaren Beziehungen entweder die Aufgabe auf eine einfachere zurückführt, oder einen Teil der gesuchten Figur, meist in Gestalt eines Hilfsdreiecks, zunächst als konstruierbar aufzeigt und aus diesem Teile durch Anwendung von geometrischen Örtern die ganze gesuchte Figur ableitet. **(Methode der Reduktion.)** Sehr brauchbar sind hier die sogenannten **Data.** Unter einem Datum versteht man ein durch die Bedingungen der Aufgabe mitgegebenes Stück, im besonderen auch die Verbindung von drei oder vier planimetrischen Größen der Art, daß im ersten Fall aus je zweien derselben ein rechtwinkliges, im anderen aus je dreien ein schiefwinkliges Dreieck so gezeichnet werden kann, daß das dritte bezw. vierte Stück dadurch mit gegeben erscheint.

2) Solche Data sind z. B.

a) die drei Winkel eines Dreiecks: $\alpha + \beta + \gamma = 2R$;

b) die beiden spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck: $\alpha = R - \beta$;

c) der Winkel α an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks und der Basiswinkel β:

$$\beta = R - \frac{\alpha}{2}.$$

d) Im Trapez ist die Mittellinie ein Datum der beiden Grundseiten:

$$m = \frac{a + b}{2}.$$

e) Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse ein Datum der beiden Katheten: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (§ 34,3).

f) In jedem Dreieck sind a, β, h_c; a, γ, h_b (also auch b, α, h_c; b, γ, h_a u. s. w.) Data für einander.

g) h_a, w_α, $\gamma - \beta$ sind Data für einander (Fig. 101); denn

$$\angle EAC = \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle DAC = R - \gamma$$

$$\angle EAD = \angle EAC - \angle DAC = \frac{\alpha}{2} - (R - \gamma)$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \gamma - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

$$= \frac{\gamma - \beta}{2},$$

d. h. h_a, w_α und $\frac{\gamma - \beta}{2}$ liegen in einem rechtwinkligen Dreieck.

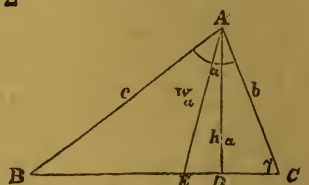


Fig. 101.

h) h_a, m_a, $p - q$ sind Data für einander (Fig. 102). Denn

$$ED = \frac{a}{2} - q$$

$$ED = p - \frac{a}{2}$$

$$2ED = p - q$$

$$ED = \frac{p - q}{2},$$

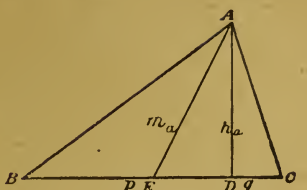


Fig. 102.

d. h. m_a, h_a, $\frac{p - q}{2}$ sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.

i) r, c, γ (bezw. r, a, α; r, b, β) sind Data für einander (Fig. 103) Denn $\angle ABD = R$ (§ 25, 2, Folg. 1), also sind 2r, c, γ Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks.

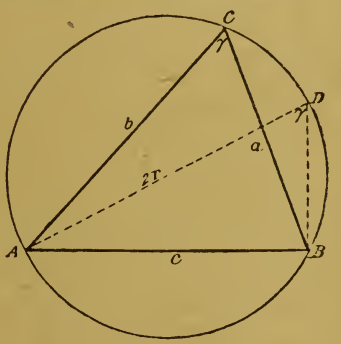


Fig. 103.

k) $\left.\begin{array}{l} a+b, c, \frac{\alpha-\beta}{2}, \gamma \\ a-b, c, \frac{\alpha-\beta}{2}, \gamma \end{array}\right\}$ sind Data für einander.

Denn, wenn man in dem Dreieck ABC (Fig. 104) die größere Seite BC über C um AC bis E verlängert und auf CB von C aus AC (gleich CD) abträgt, so ist

$$BE = a + b, \quad BD = a - b.$$

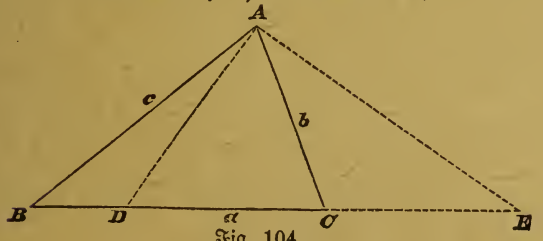


Fig. 104.

Ferner ist $\angle DAE = R$ (§ 18, 13, Anm.)

$\angle AED = \frac{1}{2}\gamma$ (§ 15, 5, Folg. 3)

$\angle DAB = \angle BAC - \angle DAC = \alpha - (R - \frac{1}{2}\gamma)$

$= \alpha - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

$= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

$\angle ADB = 2R - (R - \frac{1}{2}\gamma) = R + \frac{1}{2}\gamma.$

Es liegen also im Dreieck ABD die Stücke

$a - b$, c, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $R + \frac{1}{2}\gamma$,

im Dreieck ABE die Stücke

$a + b$, c, $R + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\frac{1}{2}\gamma$.

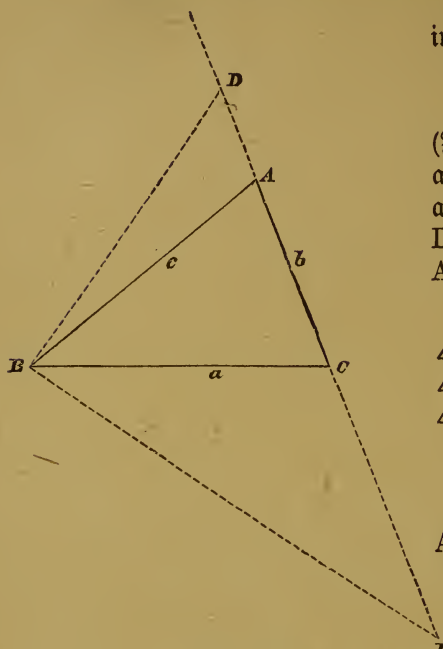


Fig. 105.

Anmerkung. Hätte man (Fig. 105) die größere Seite BC an die kleinere Seite an-, bezw. auf ihr abgetragen, bis E bezw. D, so wäre jetzt

$AE = a + b$, $AD = a - b$;

ferner

$\angle DBE = R$ (§ 18, 13, Anm.)

$\angle CBE = \frac{1}{2}\gamma$ (§ 15, 5 Folg. 3)

$\angle DBA = R - \frac{1}{2}\gamma - \beta$

$= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \beta$

$= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

Dann liegen im Dreieck ABD die Stücke

$a - b$, c, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $R - \frac{\gamma}{2}$,

im Dreieck ABE die Stücke

$a + b$, c, $R - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\frac{\gamma}{2}$.

1) In jedem Dreieck ist $\angle (r\, w_\alpha) = \angle (h_a\, w_\alpha) = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

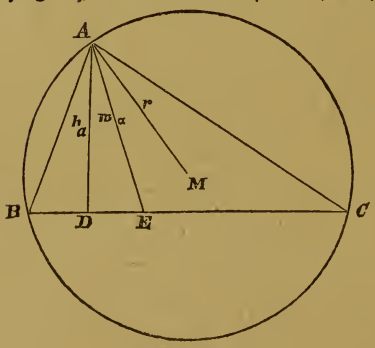


Fig. 106.

Denn es ist (Fig. 106)

$\angle MAC = R - \beta$

$\angle BAD = R - \beta$,

also $\angle DAE = \angle EAM$ (Gl. v. Gl. subtr....)

und $\angle DAE = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ (nach g),

also $\angle EAM = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$.

3) Aufgabe. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises, der Halbierungslinie eines Winkels und der Differenz der beiden anderen Winkel.

Gegeben sind zwei Strecken r und w_a und ein Winkel δ. Gefordert wird ein Dreieck, für das r der Radius des umgeschriebenen Kreises, w_a die Halbierungslinie des einen Winkels (α) und δ die Differenz ($\beta - \gamma$) der beiden anderen Winkel ist (Fig. 107).

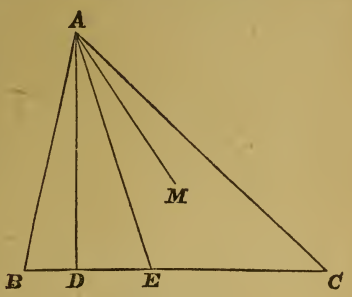


Fig. 107.

Analysis. Wäre ABC das verlangte Dreieck und M der Mittelpunkt des ihm umgeschriebenen Kreises, so müßte AE gleich w_a und AM gleich r, die Differenz der Winkel ABC und ACB gleich δ sein.

Durch w_a sind die Punkte A und E bestimmt. Der Punkt M liegt auf dem Kreise mit dem Mittelpunkte A und dem Radius r und auf dem freien Schenkel des Winkels $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, dessen anderer Schenkel AE ist. Auch die Lage von D ist bekannt, da w_a, h_a und $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ Data für einander sind. Endlich liegen die Punkte B und C auf dem Kreise mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r und auf der Verlängerung der Strecke DE.

Konstruktion. Man zeichne AE gleich w_a (Fig. 108), trage an AE in A den Winkel $\frac{1}{2}\delta$ an und trage auf dem freien Schenkel von A aus r bis M ab. Über AE als der Hypotenuse errichte man dann nach der entgegengesetzten Seite das rechtwinklige Dreieck ADE, dessen spitzer Winkel bei A gleich $\frac{1}{2}\delta$ ist. Man beschreibe ferner um M den Kreis mit dem Radius r, nenne dessen Schnittpunkte mit der Verlängerung von DE B und C, und ziehe AB und AC. Dann ist ABC das verlangte Dreieck.

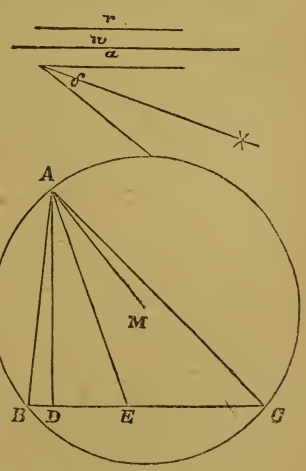


Fig. 108.

Beweis. Das Dreieck ABC ist dem Kreise mit dem Radius r nach der

Konstruktion eingeschrieben, und aus demselben Grunde ist

$$AE = w_\alpha,\ \angle DAE = \angle EAM = \frac{1}{2}\delta.$$

Als Centriwinkel ist also

$$\angle AMC = 2\angle ABC,$$

daher $\angle MAC = \angle BAD,$

also auch $\angle BAE = \angle EAC,$

d. h. AE ist die Halbierungslinie des Winkels BAC. Endlich aber ist

$$\angle DAE = \frac{\delta}{2} = \angle BAE - \angle BAD$$
$$= \frac{1}{2}\alpha - (R - \beta)$$
$$= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma - \beta)$$
$$= \frac{1}{2}(\beta - \gamma).$$

Determination. Die Lösung der Aufgabe ist möglich, so lange AM größer ist als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete $\frac{1}{2}w_\alpha$ und dem spitzen Winkel $\frac{1}{2}\delta$.

4) **Aufgabe.** Ein Parallelogramm zu konstruieren aus dem Umfang, einer Höhe und einem Winkel.

Gegeben sind zwei Strecken u und h und ein Winkel β. **Gefordert** wird ein Parallelogramm, das die Höhe h und den Winkel β enthält und dessen Umfang gleich u ist.

Analysis. Wäre ABCD (Fig. 109) das verlangte Parallelogramm, so wäre seine Konstruktion erledigt, wenn man eines der beiden kongruenten Teildreiecke ABC oder ACD konstruiert

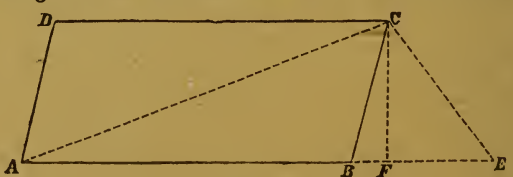


Fig. 109.

hätte. Da der Umfang des Parallelogramms doppelt so groß ist wie die Summe der beiden nicht parallelen Seiten, so kennt man in dem Dreieck ACB die Summe zweier Seiten, $\frac{1}{2}u$, den von

diesen eingeschlossenen Winkel β und die Höhe auf die eine dieser Seiten. So ist die Aufgabe auf die andere zurückgeführt: ein Dreieck zu konstruieren aus der Summe zweier Seiten $\left(\frac{u}{2}\right)$, der Höhe auf eine von diesen (h), und dem eingeschlossenen Winkel (β). Verlängert man nun AB um BC bis E und zieht EC, so entsteht das gleichschenklige Dreieck CBE, in dem als Basiswinkel $\angle BEC = \frac{1}{2}\beta$ ist. In dem Dreieck ACE kennt man jetzt eine Seite AE $\left(\frac{1}{2}u\right)$, die Höhe auf diese Seite (h) und den einen der Seite anliegenden Winkel $\left(\frac{\beta}{2}\right)$. Die Konstruktion dieses Dreiecks kann als bekannt gelten.

Konstruktion. Man zeichne AE gleich $\frac{1}{2}u$ (Fig. 110), ziehe zu AE die Parallele im Abstand h und trage in E an AE den

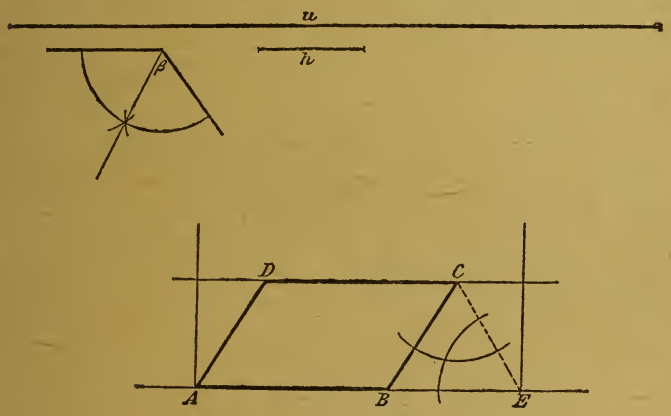


Fig. 110.

Winkel $\frac{1}{2}\beta$ an. Der Schnittpunkt des freien Schenkels mit der Parallele heißt C. In C trage man an CE wiederum den Winkel $\frac{1}{2}\beta$ an und nenne B den Schnittpunkt des freien Schenkels mit AE. Endlich ziehe man zu CB durch A die Parallele und nenne D ihren Schnittpunkt mit der ersten Parallele. Dann ist ABCD das verlangte Parallelogramm.

Beweis. ABCD ist nach der Konstruktion ein Parallelogramm. Aus demselben Grunde ist das Dreieck CBE gleichschenklig, also $BC = BE$, und der Winkel CBA als Außenwinkel an der Spitze gleich β, da jeder der Basiswinkel gleich $\frac{1}{2}\beta$ ist. Da

$$AB + BE = AB + BC = \frac{1}{2}u$$

ist, so ist der Umfang des Parallelogramms gleich u. Endlich hat es nach der Konstruktion die Höhe h.

Determination. Falls h nicht gewisse Grenzen überschreitet, ist die Lösung immer möglich. Jedenfalls muß der Schenkel CB noch die Strecke EA treffen. Im äußersten Falle, wo B mit A zusammenfällt (Fig. 110), ist h Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $\frac{1}{2}u$ und dem gegenüberliegenden Winkel $2R - \beta$. Diese Größe darf h also nicht erreichen.

5) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der Höhe aus seinem Scheitel und der Differenz der durch ihren Fußpunkt auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte.

Gegeben sind ein Winkel α und zwei Strecken h_a und d. **Gefordert** wird ein Dreieck, das den Winkel α und die von seinem Scheitel ausgehende Höhe h_a enthält, und in der die Differenz der Höhenabschnitte auf der α gegenüberliegenden Seite gleich d ist.

Analysis. Wäre ABC (Fig. 111) das verlangte Dreieck, so müßte der Winkel BAC gleich α, AD gleich h_a und $BD - CD$ gleich d sein. Nach Nr. 2, h sind nun m_a, h_a, $\frac{p-q}{2}$ Data für einander, demnach läßt sich m_a als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten h_a und $\frac{p-q}{2}$ konstruieren. Die Aufgabe ist also zurückgeführt auf die andere: ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel α und der von diesem Winkel ausgehenden Höhe und Mittellinie. Verlängert man nun

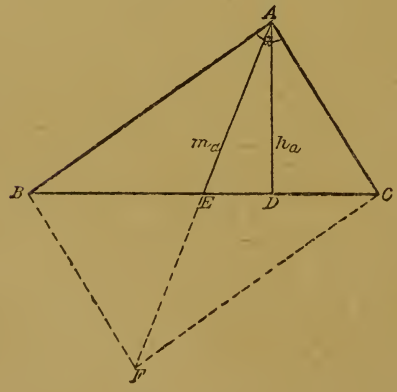


Fig. 111.

die Mittellinie AE um sie selbst bis F, zieht man ferner FB und FC, so ist ABFC ein Parallelogramm, in dem der Winkel ABF das Supplement zu α ist. Der Punkt B liegt nun einmal auf der Verlängerung der ihrer Richtung nach bekannten Geraden ED und dann auf dem Kreise mit $2R - \alpha$ als Peripheriewinkel über AF als Sehne. C liegt endlich auf der Verlängerung von EB, von E um EB entfernt. Damit ist das Dreieck ABC bestimmt.

Konstruktion. Man zeichne AD gleich h_a (Fig. 112), errichte in D das Lot DE und mache es gleich $\frac{d}{2}$, ziehe AE und verlängere die Strecke um sie selbst bis F; über AF als Sehne beschreibe man den Kreisbogen, der den Winkel $2R - \alpha$ als den Peripheriewinkel faßt, nenne C dessen Schnittpunkt mit der Verlängerung von ED; verlängere die Strecke CE um sie selbst bis B und ziehe AC und AB; ABC ist das verlangte Dreieck.

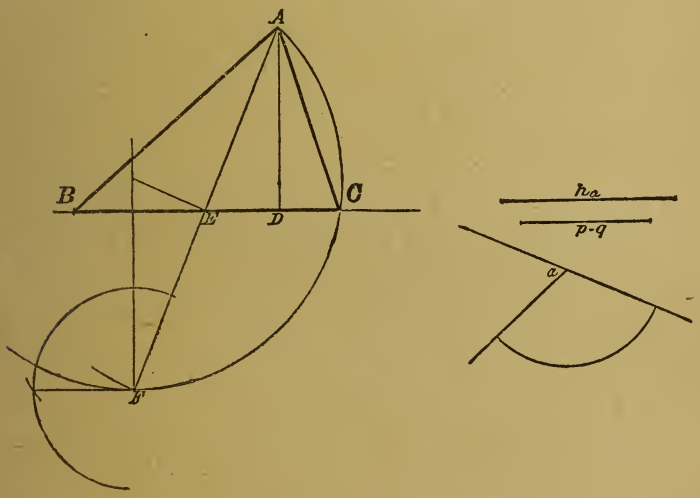


Fig. 112.

Beweis. ABC ist ein Dreieck, in dem die Strecke AD nach der Konstruktion gleich h_a und Höhe ist, weil CB senkrecht zu AD steht. Da die Diagonalen nach der Konstruktion einander halbieren, ist ABFC ein Parallelogramm; folglich ist CAB gleich α als Supplementwinkel zu dem Winkel FCA, der gleich $2R - \alpha$ ist. Ferner ist im Dreieck ABC

$$DB = p = \frac{a}{2} + ED$$

$$DC = q = \frac{a}{2} - ED$$

$$DB - DC = p - q = 2ED = 2\frac{d}{2} = d.$$

Determination. Das Dreieck kann immer konstruiert werden, da sich aus h_a und $\frac{d}{2}$ stets ein rechtwinkliges Dreieck ergibt, aus dem m_a bestimmt werden kann, und da ferner aus dem Winkel $2R - \alpha$ und der Sehne $2m_a$ stets ein Ortskreis für C konstruiert werden kann.

6) Weitere Aufgaben. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

1) r, h_b, α.	6) $b - c$, α, β.	11) α, c, $h_a + h_b$.
2) h_c, m_a, m_b.	7) h_b, $b - c$, $\beta - \gamma$.	12) w_α, ϱ, $\beta - \gamma$.
3) w_α, $\beta - \gamma$, p.	8) a, h_c, $\beta - \gamma$.	13) h_a, w_α, α.
4) a, h_b, $b + c$.	9) $b + c$, α, $\beta - \gamma$.	14) h_a, w_α, m_a.
5) α, h_c, $b + c$.	10) r, m_a, α.	15) r, $a - b$, γ.

§ 30. Methode der Parallelverschiebung und der Umlegung.

1) Eine andre, häufig anwendbare Methode ist die der Parallelverschiebung und der Umlegung. Wenn die gegebenen Stücke nicht von vornherein eine Figur bilden, die konstruiert werden kann, so gelingt die Herstellung einer solchen oft durch Überführung einer Geraden in eine andere Lage mittels paralleler Verschiebung. Dasselbe erreicht man in anderen Fällen, indem man z. B. einen Kreis durch Verschiebung seines Mittelpunktes auf einer Geraden an eine andere Stelle bringt, oder indem man einen Teil der Analysisfigur umlegt, um eine bequeme Lage der gegebenen Stücke zueinander zu erhalten.

2) Aufgabe. Ein Trapez zu zeichnen aus den Diagonalen und den parallelen Seiten.

Gegeben sind die vier Strecken a, b, e und f. Gefordert wird ein Trapez, in dem die Strecken a und b die parallelen Seiten, die Strecken e und f die Diagonalen sind.

Analysis. Wäre ABCD (Fig. 113) das verlangte Trapez, so müßte AB gleich a, CD gleich b, AC gleich e, BD gleich f sein.

Man kann die Strecke AC parallel zu ihrer Anfangslage verschieben, sodaß der Punkt A auf B, der Punkt C auf den Punkt E

der Verlängerung von DC zu liegen kommt, also CE gleich AB ist. Dann kann das Dreieck BDE aus den drei Seiten gezeichnet werden. Es ist damit die Lage der Punkte B, D und unmittelbar darauf auch die von C bestimmt. Der Punkt A aber liegt auf der Parallelen zu DE durch B und auf der Parallelen zu BE durch C.

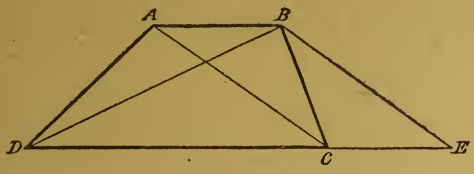


Fig. 113.

Konstruktion. Man zeichne DC gleich b, verlängere DC über C um a bis E, beschreibe um D den Kreis mit f, um E den Kreis mit e als Radius, nenne ihren Schnittpunkt B und ziehe CB. Nun ziehe man durch B zu DC, durch C zu BE die Parallelen, die einander in A treffen. Dann ist ABCD das verlangte Trapez.

Beweis. Das Viereck ABCD ist ein Trapez, weil nach der Konstruktion ein Paar Gegenseiten (AB und CD) parallel sind. Nach der Konstruktion ist ferner $DC = b$, $AB = a$, weil AB Gegenseite zu CE in dem Parallelogramm ABEC ist, und CE nach der Konstruktion gleich a ist. Endlich sind DB und AC, die Diagonalen des Trapezes, nach der Konstruktion bezw. als Gegenseiten im Parallelogramm, gleich f und e.

Determination. Solange $f - e < a + b < e + f$ ist, ist die Lösung der Aufgabe immer möglich. (§ 14, 3 u. 4.)

3) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der Differenz der ihn einschließenden Seiten und der Mittellinie aus dem Scheitel des Winkels.

Gegeben ist ein Winkel γ und zwei Strecken d und m_c. **Gefordert** wird ein Dreieck, in dem der Winkel γ von Seiten eingeschlossen wird, deren Differenz gleich d ist, und in dem die Mittellinie aus dem Scheitel von γ gleich m_c ist.

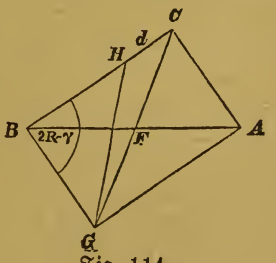


Fig. 114.

Analysis. Wäre ABC (Fig. 114) das verlangte Dreieck, so müßte $\angle ACB = \gamma$, $CF = m_c$ und $CB - AC = d$ sein.

Verlängert man die Strecke CF um sie selbst bis G, zieht GA und GB, so entsteht das Parallelogramm AGBC; GB und AC sind gleich b, und der Winkel GBC gleich $2R - \gamma$. Trägt man nun BG von B aus auf BC bis H ab, so ist CH gleich d. Zieht man HG, so ist der Winkel GHB gleich $\frac{1}{2}\gamma$, also der Winkel GHC gleich $2R - \frac{1}{2}\gamma$. Im Dreieck CBG ist HC als Differenz zweier Seiten kleiner als CG. Also kann man das Dreieck GCH aus zwei Seiten ($GC = 2m_c$, $CH = d$) und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel ($\angle GHC = 2R - \frac{1}{2}\gamma$) zeichnen. Dann ist die Lage von B bestimmt: B ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis GH und dessen Basiswinkel $\frac{1}{2}\gamma$ bekannt sind. Damit ist endlich auch die Lage von A, der vierten Ecke des Parallelogramms ACBG, gegeben.

Konstruktion. Man zeichne CH gleich d (Fig. 115), trage in H an CH den Winkel $2R - \frac{1}{2}\gamma$ an, schlage um C mit dem Radius $2m_c$

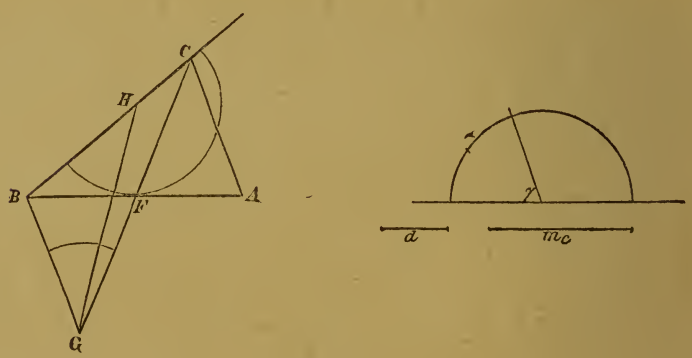


Fig. 115.

den Kreis und nenne G dessen Schnittpunkt mit dem freien Schenkel. In G trage man an GH den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ an; der Schnittpunkt des freien Schenkels mit der Verlängerung von CH heiße B. Ferner halbiere man CG in F, ziehe BF, verlängere diese Strecke um sie selbst bis A und ziehe AC. Dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Bew. ABC ist ein Dreieck, in dem nach der Konstruktion CF gleich m_c und Mittellinie nach BA ist. Ferner ist ACBG ein Parallelogramm, weil die Diagonalen nach der Konstruktion sich halbieren, also CA = BG. Nach der Konstruktion ist der Winkel CHG gleich $2R - \frac{\gamma}{2}$, also der Nebenwinkel BHG gleich $\frac{\gamma}{2}$, demnach der Winkel HBG als Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks HBG gleich $2R - \gamma$, d. h. der Winkel BCA als anliegender Winkel im Parallelogramm gleich γ. Ferner folgt, daß

BH = BG = CA ist. Also ist BC − AC = BC − BH = d.

Determination. Aus zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel kann stets ein Dreieck gezeichnet werden. Also kann, falls nur $d < 2m_c$, stets das Dreieck CHG, also auch das Dreieck HBG und das Parallelogramm CBGA, also auch seine Hälfte, das Dreieck CBA, konstruiert werden.

4) Weitere Aufgaben. Ein Dreieck zu konstruieren aus:

1) b, c, $\angle(m_a\, b)$.
2) $a + b$, m_c, $\angle(m_c\, a)$.
3) a, m_a, h_c.
4) m_c, h_a, h_b.
5) a, c, $\alpha - \gamma$.
6) β, h_b, m_b.
7) Ein Trapez zu konstruieren aus den Diagonalen, dem Winkel zwischen ihnen und einer Seite.
8) Ein Parallelogramm zu konstruieren aus einer Seite und den beiden Höhen.
9) Ein Viereck zu konstruieren aus seinen Winkeln und zwei gegenüberliegenden Seiten.
10) Ein Trapez zu konstruieren aus den vier Seiten.
11) Ein Viereck zu konstruieren aus drei Seiten und dem der vierten Seite anliegenden Winkel.
12) Ein Trapez zu konstruieren aus den Diagonalen, ihrem Zwischenwinkel und einer Seite.
13) Ein Viereck zu konstruieren aus den Winkeln und zwei Gegenseiten.

Sechster Abschnitt. Vergleichung und Messung des Flächeninhalts der Vielecke.

§ 31. Vergleichung des Flächeninhalts von Parallelogrammen und Dreiecken.

1) Im Parallelogramm kann man jede Seite als Grundseite betrachten; Höhe des Parallelogramms heißt dann der Abstand der Gegenseite von der Grundseite (§ 20, 1. Erklärung).

Im Dreieck kann man jede Seite als Grundseite betrachten; Höhe des Dreiecks heißt dann der Abstand der Spitze von der Grundseite (§ 19, 9).

Im Trapez pflegt man die beiden parallelen Seiten als Grundseiten zu betrachten; Höhe des Trapezes heißt dann der Abstand der parallelen Seiten.

2) Hilfssatz. Parallelogramme, Dreiecke und Trapeze mit gleichen Höhen können zwischen dieselben Parallelen gelegt werden (Fig. 116).

Der Beweis folgt aus § 18, 6, 7, 8; Ort III.

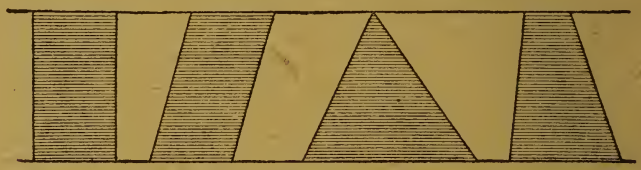


Fig. 116.

3) Lehrsatz. Parallelogramme mit gleichen Grundseiten und Höhen sind einander gleich.

Vor. Die Parallelogramme ABCD und EFGH haben gleiche Grundseiten (DC = HG) und gleiche Höhen (Fig. 117).

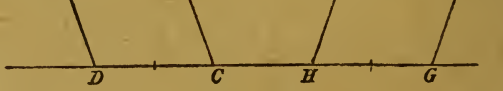


Fig. 117.

Beh. ABCD = EFGH.

Bew. Man lege die beiden Parallelogramme zwischen dieselben Parallelen (nach 2), dann ist

$$AEHD \cong BFGC \quad (\S\ 22, 1)$$
$$BEHC = BEHC$$
$$\text{also } AEHD - BEHC = BFGC - BEHC$$
$$\text{d. h.} \qquad ABCD = EFGH.$$

Folgerungen. 1. Ein Dreieck ist die Hälfte jedes Parallelogramms mit gleicher Grundseite und Höhe.

2. Dreiecke mit gleichen Grundseiten und Höhen sind einander gleich.

3a. (Erste Umkehrung der Folg. 2.) Flächengleiche Dreiecke mit gleichen Grundseiten haben auch gleiche Höhen.

b. (Zweite Umkehrung der Folg. 2.) Flächengleiche Dreiecke mit gleichen Höhen haben auch gleiche Grundseiten.

4. Ein Dreieck ist gleich einem Parallelogramm mit gleicher Grundseite und halber Höhe, oder mit halber Grundseite und gleicher Höhe.

Ort. Der Ort für die Spitzen aller flächengleichen Dreiecke über derselben Grundseite ist eine Parallele zur Grundseite. (Dies folgt aus Folg. 3a in Verbindung mit § 18, 8; Ort III.)

4) **Aufgabe.** Eine Strecke in n (z. B. 5) gleiche Teile zu teilen.

Gegeben ist die Strecke AB (Fig. 118).

Konstr. Man ziehe durch A eine beliebige Gerade, trage von A aus auf ihr eine beliebige Strecke fünfmal nacheinander ab (AC = CD = DE = EF = FG) und ziehe GB. Zur Geraden GB ziehe man dann die Parallelen durch C, D, E und F, die AB in H, I, K und L schneiden.

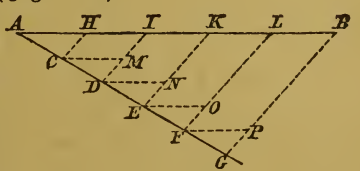


Fig. 118.

Beh. AH = HI = IK = KL = LB.

Bew. Man ziehe noch durch C, D, E und F die Parallelen zu AB. Dann folgt aus der Kongruenz der Dreiecke ACH, CDM, DEN ... (II), daß AH = CM = DN ... ist.

Da aber CM = HI, DN = IK, ... ist (§ 18, 6), so ist auch AH = HI = IK ...

5) **Aufgabe.** Ein Dreieck von einer Ecke aus in n (z. B. 5) gleiche Teile zu teilen.

Gegeben ist das Dreieck ABC (Fig. 119).

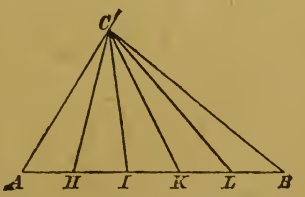


Fig. 119.

Konstr. Man teile BC in fünf gleiche Teile (Aufg. 4) und verbinde C mit H, I, K und L.

Beh. $\triangle CAH = \triangle CHI = \triangle CIK = \triangle CKL = \triangle CLB$.

Bew. Er folgt unmittelbar aus 3, Folg. 2.

6) **Erklärung.** Eine Figur in eine andere **verwandeln** heißt, eine andere Figur mit gleichem Flächeninhalte konstruieren.

7) **Aufgabe.** Ein Dreieck in ein anderes mit gegebener Grundseite g zu verwandeln.

Gegeben ist das Dreieck ABC und die Strecke g. (In Fig. 120, I ist $g > BC$, in Fig. 120, II ist $g < BC$.)

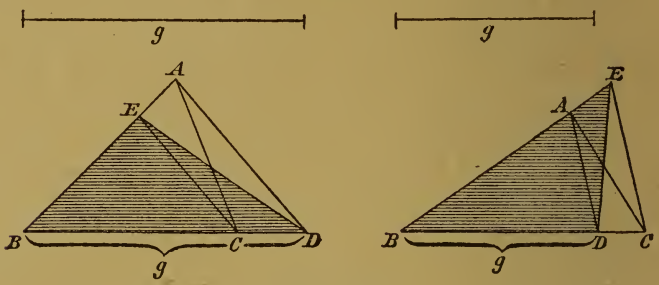


Fig. 120.

Konstr. Man trage g von B aus auf BC ab ($BD = g$), verbinde D mit A, ziehe CE parallel zu DA und ziehe ED.

Beh. $\triangle EBD = \triangle ABC$, $BD = g$.

Bew. Es ist in beiden Figuren 120:

$$\triangle BEC = \triangle BEC, \text{ ferner}$$
$$\triangle DEC = \triangle AEC \text{ (3, Folg. 2)},$$

also in Fig. I $BEC + DEC = BEC + AEC$,

d. h. $\triangle EBD = \triangle ABC$.

Für Fig. II gilt:

$BEC - DEC = BEC - AEC$,

d. h. $\triangle EBD = \triangle ABC$;

ferner ist $BD = g$ (Konstr.).

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck soll in ein anderes mit gegebener Höhe verwandelt werden.

8) **Satz von den Ergänzungsparallelogrammen.** Zieht man im Parallelogramm durch einen Punkt der einen Diagonale die Parallelen zu den Seiten, so haben die beiden von der Diagonale nicht durchschnittenen Parallelogramme (**Ergänzungsparallelogramme**) gleichen Flächeninhalt.

Vor. $AB \parallel CD \parallel FG$, $AD \parallel BC \parallel HI$,
$\angle AEC = \angle IEH = \angle FEG = 2R$.
$\angle AFD = \angle DIC = \angle CGB = \angle AHB = 2R$ (Fig. 121).

Beh. $EFDI = EHBG$.

Bew. Es ist
$$\left.\begin{array}{l} \triangle ADC \cong \triangle ABC \\ \triangle AFE \cong \triangle AHE \\ \triangle EIC \cong \triangle EGC \end{array}\right\} (\S\ 20, 2a.),$$
folglich ist $ADC - AFE - EIC = ABC - AHE - EGC$ (Gl. von Gl. subtr. ...) oder $EFDI = EHBG$.

Aufgabe. Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebener Seite s zu verwandeln.

Die Konstruktion wird entweder mit Benutzung von 8) oder mit der weiteren Gleichung: $ADIH = AFGB$ (Fig. 121), oder auch wie die Aufgabe 7) ausgeführt.

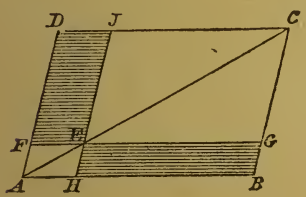


Fig. 121.

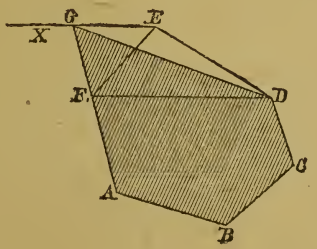


Fig. 122.

9) **Aufgabe.** Ein Vieleck in ein anderes zu verwandeln, das eine Seite weniger hat (z. B. ein Sechseck in ein Fünfeck).

Gegeben ist das Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 122).

Konstr. Man verbinde F mit D, ziehe EX parallel zu DF, verlängere AF bis zum Schnittpunkte G mit EX und ziehe GD.

Beh. $ABCDG = ABCDEF$.

Bew. Da $\triangle GFD = \triangle EFD$ (3, Folg. 2)
und $ABCDF = ABCDF$ ist,
so ist auch $GFD + ABCDF = EFD + ABCDF$
oder $ABCDG = ABCDEF$.

Anmerkung. Durch Fortsetzung des Verfahrens läßt sich jedes Vieleck in ein Dreieck verwandeln.

10) **Aufgabe.** Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

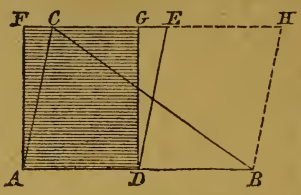


Fig. 123.

Gegeben ist das Dreieck ABC (Fig. 123).

Konstr. Man halbiere AB in D, ziehe CH parallel zu AB und errichte in A und D auf AD die Lote AF und DG.

Beh. $ADGF = \triangle ABC$.

Bew. Denkt man sich zu AC die Parallelen DE und BH gezogen, so ist

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} ABHC \text{ (nach 3, Folg. 1)}$$
$$ADEC = \tfrac{1}{2} ABHC \text{ (nach 3),}$$

folglich $\triangle ABC = ADEC$.

Da aber auch $ADGF = ADEC$ ist (nach 3),

so ist auch $ADGF = \triangle ABC$.

Anmerkung. Nach 9) Anmerk. und 10) kann jedes Vieleck in ein Rechteck verwandelt werden. Hiernach und nach § 5b (Fig. 1) kann also auch der Flächeninhalt eines jeden Vielecks **gemessen** oder **berechnet** werden.

Die Möglichkeit der Berechnung ist aber an die Voraussetzung geknüpft, daß es eine Maßeinheit gibt, die in den beiden Seiten des Rechtecks aufgeht (s. Fig. 1).

§ 32. Messung des Flächeninhalts von Rechtecken und anderen Vielecken.

1) **Erklärungen.** 1. **Maß einer Strecke** heißt jede andere Strecke, die sich auf der ersten ohne Rest abtragen läßt.

2. **Gemeinsames Maß zweier Strecken** heißt jede Strecke, die sich auf beiden ohne Rest abtragen läßt.

2) **Aufgabe.** Ein gemeinsames Maß zweier (durch Zeichnung) gegebenen Strecken zu finden.

Gegeben sind zwei Strecken AB und CD (Fig. 124).

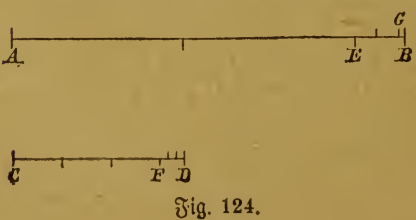


Fig. 124.

Konstr. Man trage von A aus CD wiederholt auf AB ab, bis ein Rest EB bleibt, der kleiner ist als CD ($AB = 2CD + EB$). Diesen Rest trage man von C aus wiederholt auf CD

ab, bis ein Rest FD bleibt, der kleiner ist als EB ($CD = 3EB + FD$), und so fahre man fort, bis einmal ein Rest der einen Strecke in einem Reste der anderen Strecke **genau** aufgeht ($EB = 2FD + GB$, $FD = 3GB$).

Beh. Der zuletzt erhaltene Rest (GB) ist ein gemeinsames Maß der Strecken AB und CD.

Bew. Es ist
1. $AB = 2CD + EB$
2. $CD = 3EB + FD$
3. $EB = 2FD + GB$
4. $FD = 3GB$.

Drückt man nun, von unten nach oben gehend, die in diesen vier Gleichungen vorkommenden Strecken sämtlich durch GB aus, so erhält man:

3′) $EB = 6GB + GB = 7GB$
2′) $CD = 21GB + 3GB = 24GB$
1′) $AB = 48GB + 7GB = 55GB$.

Folglich kann die Strecke GB auf AB 55mal, auf CD 24=mal ohne Rest abgetragen werden, GB ist also ein gemeinsames Maß der Strecken AB und CD.

Vgl. § 48, 2, Abs. 2.

Anmerkung. So sehr es ein Zufall wäre, wenn von zwei nur durch Zeichnung gegebenen Strecken (wie die beliebig gezeichneten Strecken AB und CD in Fig. 124 es sind) die kleinere **genau** in der größeren aufginge, so ist auch von vornherein nicht zu erwarten, daß jemals ein Rest in dem vorigen **genau** aufgehen müßte. Nur die Unvollkommenheit unserer Sinnesorgane und Instrumente läßt das nach einigen Wiederholungen des Verfahrens so erscheinen, weil der sehr klein gewordene Rest nicht mehr als Strecke erkennbar ist.

Von manchen Strecken, wie z. B. der Diagonale und Seite eines Quadrats, der Seite und Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, kann bewiesen werden, daß sie kein gemeinsames Maß haben.

Vgl. § 48, 3, § 50, 2 und § 37, 1.

3) **Erklärung. Kommensurabel** heißen zwei Strecken, die ein gemeinsames Maß haben.

Inkommensurabel heißen zwei Strecken, die kein gemeinsames Maß haben.

Das **Verhältnis** (s. § 48, 1) zweier kommensurabler Strecken ist eine rationale Zahl, d. h. eine ganze Zahl oder ein Bruch (so ist in Fig. 123 $\frac{AB}{CD} = \frac{55}{24}$).

Das **Verhältnis** zweier inkommensurabler Strecken ist eine irrationale Zahl (s. § 48, 3).

4) **Erklärungen.** Eine Strecke **messen** heißt angeben, wie oft eine andere als **bekannt angenommene** Strecke in ihr enthalten ist.

Die als bekannt angenommene Strecke heißt **Maßeinheit** oder **Längeneinheit** (gewöhnlich das Meter und die durch Zehnteilung desselben entstandenen niederen Maßeinheiten — vgl. § 5a).

Maßzahl einer Strecke heißt die Zahl, die angibt, wie oft die Maßeinheit in der Strecke enthalten ist.

Die Maßzahl einer Strecke ist eine rationale (ganze oder gebrochene) oder eine irrationale Zahl, je nachdem die Strecke und die Maßeinheit kommensurabel oder inkommensurabel sind.

Das Messen von Flächen. Als Maßeinheit für die Flächen oder als **Flächeneinheit** gebraucht man die Fläche desjenigen Quadrates, dessen Seite gleich der für die Ausmessung von Strecken gewählten Maßeinheit ist. **Maßzahl einer Fläche** ist also die Zahl, die angibt, wie oft die Fläche des als Maßeinheit gewählten Quadrates in der zu messenden Fläche enthalten ist. Dabei ist zu beachten, daß man jedes Vieleck mit beliebigen Winkeln in ein Rechteck verwandeln kann, das dann mit der Flächeneinheit gemessen wird (vgl. § 31, 9 und 10).

5) **Lehrsatz.** Rechtecke mit gleichen Grundseiten verhalten sich zueinander wie ihre Höhen (vgl. § 48, 5).

Vor. $BC = FG$, $AB \# CD$, $\angle ABC = R$, $EF \# GH$, $\angle EFG = R$ (Fig. 125, I und II).

Beh. $ABCD : EFGH = AB : EF$.

Bew. I. AB und EF sind kommensurabel (Fig. 125, I).

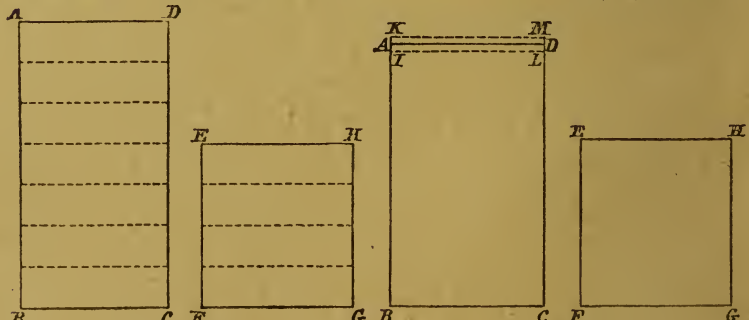


Fig. 125 I. Fig. 125 II.

Das gemeinsame Maß sei in AB m(7) mal und in EF n(4) mal enthalten. Man trage es nun auf AB und CD ab und ziehe durch die Teilpunkte die Parallelen zu den Grundseiten.

Da diese die Rechtecke in m und n (7 und 4) kongruente Rechtecke zerlegen,
so verhält sich $ABCD : EFGH = m : n$ (7 : 4).
Da sich auch $AB : EF = m : n$ (7 : 4) verhält,
so ergibt sich $ABCD : EFGH = AB : EF$.

II. AB und EF sind inkommensurabel (Fig. 125, II).

Dem Beweise des zweiten Falles ist vorauszuschicken die

Erklärung. Zwei Größen (oder zwei Zahlen) sollen gleich heißen, wenn ihre Differenz kleiner ist als jede beliebig kleine Größe (Zahl).

Man denke sich EF in n (eine große Anzahl!) gleiche Teile geteilt und einen solchen Teil von B aus auf BA wiederholt abgetragen. Dann wird ein Teilpunkt, z. B. der mte (I) noch vor A, der nächste (K) schon hinter A fallen.

Es ist daher $IB < AB < KB$,

also auch $\frac{IB}{EF} < \frac{AB}{EF} < \frac{KB}{EF}$

oder $\frac{m}{n} < \frac{AB}{EF} < \frac{m+1}{n}$.

Denkt man sich nun wieder durch alle Teilpunkte die Parallelen zu den Grundseiten gezogen, so zerlegen diese das Rechteck IBCL in m und das Rechteck KBCM in (m + 1) gleiche Rechtecke.

Man erhält $IBCL < ABCD < KBCM$,

also auch $\frac{IBCL}{EFGH} < \frac{ABCD}{EFGH} < \frac{KBCM}{EFGH}$

oder $\frac{m}{n} < \frac{ABCD}{EFGH} < \frac{m+1}{n}$.

Dann ist $\frac{ABCD}{EFGH} - \frac{AB}{EF} < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n}$ oder $< \frac{1}{n}$. Da man aber n beliebig groß wählen kann, so ist $\frac{1}{n}$ beliebig klein, sodaß nach der obigen Erklärung $\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AB}{EF}$.

Anmerkung. Wählt man z. B. n gleich einer Potenz von 10, so ist $\frac{ABCD}{EFGH} - \frac{AB}{EF} < 0{,}000 \ldots 01 = 0{,}000 \ldots 00$.

Folgerungen. 1. Rechtecke mit gleichen Höhen verhalten sich zueinander wie ihre Grundseiten.

2. Parallelogramme oder Dreiecke mit gleichen Grundseiten verhalten sich zueinander wie ihre Höhen.

3. Parallelogramme oder Dreiecke mit gleichen Höhen verhalten sich zueinander wie ihre Grundseiten.

6) **Erklärung.** **Produkt zweier Strecken** ist eine Abkürzung für den Ausdruck: Produkt der Maßzahlen der Strecken.

Mit einer Strecke kann man nicht multiplizieren — vgl. § 45, 1.

7) **Lehrsatz.** Rechtecke verhalten sich zueinander wie die Produkte ihrer Grundseiten und Höhen.

Vor. R und R′ sind zwei Rechtecke mit den Seiten g, h und g′, h′ (Fig. 126).

Beh. $R : R' = g \cdot h : g' \cdot h'$.

Bew. Man zeichne ein drittes Rechteck, R″, das die Grundseite g und die Höhe h′ hat.

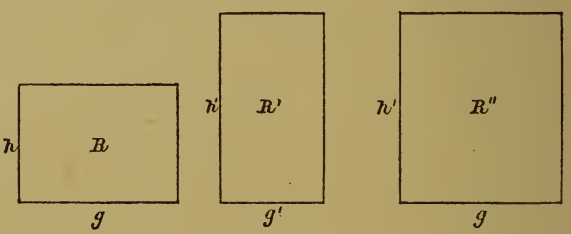


Fig. 126.

Dann ist $\frac{R}{R''} = \frac{h}{h'}$ (Lehrs. 5),

$$\frac{R''}{R'} = \frac{g}{g'} \text{ (Lehrs. 5 Folg. 1);}$$

folglich $\frac{R}{R''} \cdot \frac{R''}{R'} = \frac{h}{h'} \cdot \frac{g}{g'}$

oder $\frac{R}{R'} = \frac{g \cdot h}{g' \cdot h'}$.

8) **Lehrsatz.** Der Inhalt des Rechtecks ist gleich dem Produkte zweier anstoßenden Seiten (mit derjenigen Flächenbenennung, die dem angewendeten Längenmaße entspricht).*)

*) Also qm, wenn die Seiten in m gemessen sind; qcm, wenn die Seiten in cm gemessen sind, u. s. f. Die in Klammern stehende Ergänzung des Lehrsatzes gilt ebenso für die in 9) aufgestellten Sätze und ist als selbstverständlich dort nicht mehr wiederholt.

Vor. R ist der Flächeninhalt eines Rechtecks, dessen Seiten g und h Längeneinheiten (Meter, Centimeter u. s. f.) lang sind (Fig. 127).

Beh. $R = g \cdot h$ (qm, qcm u. s. f.).

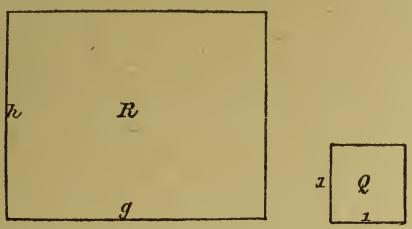


Fig. 127.

Bew. Sei Q die Flächeneinheit (qm, qcm u. s. f.), deren Seiten gleich der Längeneinheit sind, so ist

$$\frac{R}{Q} = \frac{g \cdot h}{1 \cdot 1} \text{ (Lehrs. 7)}$$

oder $R = g \cdot h \cdot Q = g \cdot h$ (qm, qcm u. s. f.).

So beträgt der Inhalt des in Fig. 128 dargestellten Rechtecks 15 qcm, da seine Seiten in Centimetern gemessen sind.

Fig. 128.

9) **Weitere Flächensätze.** 1. Der Inhalt (F) des Quadrats (mit der Seite a) ist gleich dem Quadrat seiner Seite (a^2).

$$F = a^2.$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Lehrsatze 8).*)

2. Der Inhalt des Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus der Grundseite (g) und der Höhe (h).

$$F = g \cdot h.$$

Dies folgt aus dem Lehrsatze 8) in Verbindung mit § 31, 8.

3. Der Inhalt des Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus der Grundseite (g) und der Höhe (h).

$$F = \frac{g \cdot h}{2} = g \cdot \frac{h}{2} = \frac{g}{2} \cdot h.$$

*) Ist also a oder AB eine Strecke, so bedeutet a^2 oder AB^2 den Inhalt des Quadrates mit dieser Strecke als Seite; sind a und b oder AB und CD zwei Strecken, so bedeutet $a \cdot b$ oder $AB \cdot CD$ den Inhalt des Rechtecks, dessen Seiten diese Strecken sind.

Dies folgt aus dem Lehrsatze 8) in Verbindung mit § 31, 3 Folg. 1.

4. Der Inhalt des Trapezes ist gleich dem Produkte aus der halben Summe der Grundseiten (a und b) und der Höhe (h).

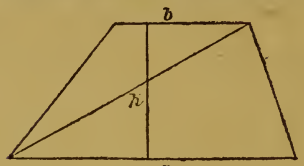


Fig. 129.

Denn zerlegt man das Trapez (Fig. 129) durch eine Diagonale in zwei Dreiecke mit der Höhe h und den Grundseiten a und b, so erhält man für den Inhalt F des Trapezes die Gleichung:

$$F = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) \cdot h \text{ (§ 45, 4 Umkehr.)}$$

$$= \frac{a + b}{2} \cdot h \text{ (§ 47, 3 Umkehr.).}$$

5. Der Inhalt jedes einem Kreise umgeschriebenen Polygons ist gleich dem Produkte aus seinem halben Umfange und dem Radius des Kreises.

Denn zerlegt man z. B. ein Tangentenviereck (Fig. 130) durch die Verbindungslinien seiner Ecken mit dem Kreismittelpunkte in vier Dreiecke mit der Höhe ϱ und den Seiten a, b, c und d, so erhält man für den Inhalt F des Tangentenvierecks die Gleichung

$$F = \frac{a \cdot \varrho}{2} + \frac{b \cdot \varrho}{2} + \frac{c \cdot \varrho}{2} + \frac{d \cdot \varrho}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d}{2}\right) \cdot \varrho$$

(§ 45, 4 Umkehr.)

$$= \frac{a + b + c + d}{2} \cdot \varrho \text{ (§ 47, 3 Umkehr.).}$$

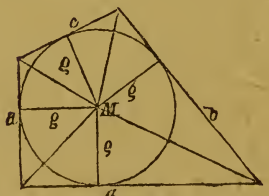


Fig. 130.

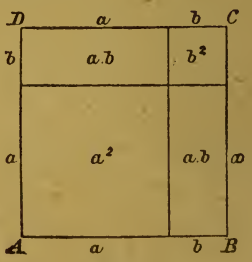


Fig. 131.

10) **Lehrsatz.** Das Quadrat über der Summe zweier Strecken ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Strecken, vermehrt um das doppelte Rechteck aus den beiden Strecken.

Denn stellt ABCD (Fig. 131) das Quadrat über der Summe zweier Strecken a und b dar, so ergibt die Anschauung sofort

$$ABCD = a^2 + ab + ab + b^2$$

oder $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (vgl. § 46, 1).

11) **Lehrsatz.** Das Quadrat über der Differenz zweier Strecken ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Strecken, vermindert um das doppelte Rechteck aus den beiden Strecken.

Denn stellt ABCD (Fig. 132) das Quadrat über der Strecke a, AEFG das Quadrat über der Strecke b, FHCK das Quadrat über der Differenz (a−b) dar,

so ist $(a - b)^2 = a^2 - AEKD - EBHF$

$= a^2 - a \cdot b - (ABHG - b^2)$

$= a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2$ (§ 43, 6),

also $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (vgl. § 46, 2).

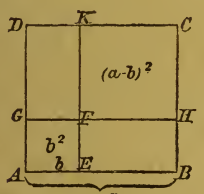


Fig. 132.

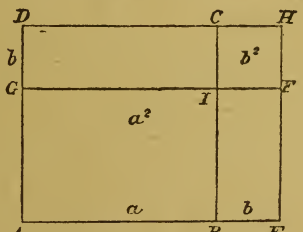


Fig. 133.

12) **Lehrsatz.** Das Rechteck aus der Summe und der Differenz zweier Strecken ist gleich der Differenz der Quadrate über den beiden Strecken.

Denn stellt ABCD (Fig. 133) das Quadrat über der Strecke a, AE die Summe (a + b), AG die Differenz (a − b), also AEFG das Rechteck aus den Strecken (a + b) und (a − b) und IFHC das Quadrat über der Strecke b dar,

so ist $AEFG = ABCD - GICD + BEFI$,

oder $(a + b)(a - b) = a^2 - a \cdot b + BEHC - IFHC$ (§ 43, 4),

d. h. $(a + b)(a - b) = a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2$ (vgl. § 46, 3).

§ 33. Der pythagoreische Lehrsatz.

1) **Erklärung.** Eine Strecke auf eine Gerade **projizieren** heißt von ihren beiden Endpunkten die Lote auf die Gerade fällen.

Projektion einer Strecke auf eine Gerade heißt der Abstand der Fußpunkte derjenigen Lote, die von den Endpunkten der Strecke auf die Gerade gefällt worden sind.

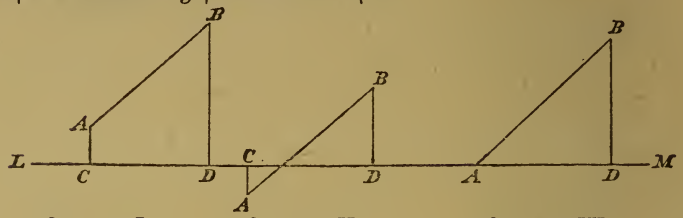


Fig. 134 I. Fig. 134 II. Fig. 134 III.

In Fig. 134, I und II ist CD die Projektion von AB auf LM, in Fig. 134, III ist AD die Projektion von AB auf LM.

Ist $AB \parallel LM$, so ist die Projektion von AB gleich AB; ist $AB \perp LM$, so ist die Projektion von AB ein Punkt.

2) **Der Kathetensatz.** Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus ihrer Projektion auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse.

Vor.

$\angle ABC = R$, $\angle BDA = \angle BDC = R$

$AB = BH = HI = IA$, $\angle ABH = R$

$AG = DF = AC$, $AD = GF$, $\angle ADF = R$ (Fig. 135).

Beh. $ABHI = ADFG$.

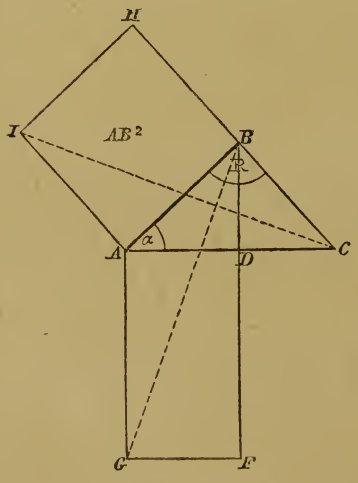


Fig. 135.

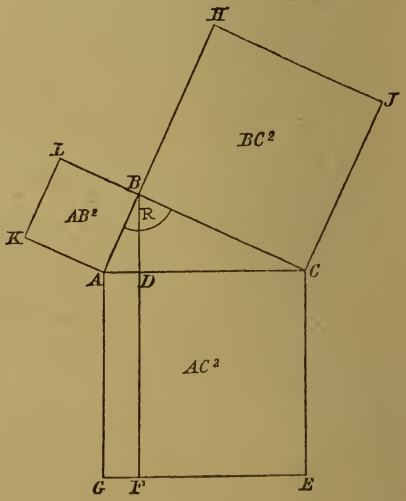


Fig. 136.

Bew. $\triangle ACI \cong \triangle AGB$ (I),

$$\left.\begin{aligned} 2\triangle ACI &= ABHI \\ 2\triangle AGB &= ADFG \end{aligned}\right\} \text{(§ 31, 3 Folg. 1).}$$

also $ABHI = ADFG$.

3) **Der pythagoreische*) Lehrsatz.** Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Vor. $\angle ABC = R$ (Fig. 136).

Beh. $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Bew. (Euklidischer**) Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes.) Fällt man von B auf AC das Lot BD, und nennt man F den Schnittpunkt seiner Verlängerung mit EG, so ist nach dem Kathetensatze (2)

$$AB^2 = ADFG$$
$$BC^2 = CEFD,$$

folglich $AB^2 + BC^2 = ADFG + CEFD$

$$= ACEG,$$

d. h. $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Folgerung. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich der Differenz aus dem Quadrat über der Hypotenuse und dem Quadrat über der anderen Kathete.

Da $AB^2 + BC^2 = AC^2$

und $BC^2 = BC^2$ ist,

so ist $AB^2 = AC^2 - BC^2$.

Aufgaben. 1. Ein Quadrat zu konstruieren, das der Summe zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

2. Ein Quadrat zu konstruieren, das der Differenz zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

3. Ein Quadrat zu konstruieren, das n mal so groß ist wie ein gegebenes ($n = 2, 3, 4, \ldots \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots$).

4) **Lehrsatz.** Ist in einem Dreieck das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen, so ist der Gegenwinkel der ersten Seite ein Rechter (Umkehrung des pythagoreischen Lehrsatzes).

Vor. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (Fig. 137).

Beh. $\angle ACB = R$.

---

*) Pythagoras von Samos, 580—501 v. Chr.

**) Euklides, um 300 v. Chr. zu Alexandria, Verfasser des ersten streng systematischen Lehrbuchs der Elementarmathematik (Στοιχεῖα, elementa, in 13 Büchern).

Bew. Man errichte in C das Lot auf BC, trage auf ihm von C aus AC ab (CD = CA) und verbinde D mit B. (I)

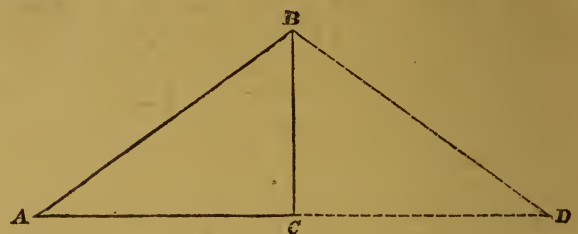


Fig. 137.

Dann ist im rechtwinkligen Dreieck BCD (nach 4)

$$BD^2 = DC^2 + BC^2$$

und, da (nach der Konstr.) $DC = AC$ ist, auch

$$BD^2 = AC^2 + BC^2.$$

Da nun nach der Vor. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ist,

so muß $BD^2 = AB^2$,

also auch $BD = AB$ sein.

Folglich ist $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ (III),

also auch $\angle ACB = \angle DCB$.

Da nun (nach der Konstr.) $\angle DCB = R$ ist,

so muß auch $\angle ACB = R$ sein.

Anmerkung. Rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten ein gemeinsames Maß besitzen (kommensurabel sind), heißen **pythagoreische Dreiecke.**

Sind m und n beliebige ganze Zahlen, so muß die Hypotenuse $m^2 + n^2$, die Katheten müssen $m^2 - n^2$ und $2mn$ sein; denn $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$. Wählt man m und n relativ prim und beide nicht ungerade, so erhält man leicht die Maßzahlen pythagoreischer Dreiecke. Einige davon sind:

Kathete a,	Kathete b,	Hypotenuse c.
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41
11	60	61
12	35	37
13	84	85
16	63	65

5) Der Höhensatz. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den Projektionen der beiden

Katheten auf die Hypotenuse (oder aus den Abschnitten der Hypotenuse).

Vor. $\angle ABC = \angle ADB = \angle CDB = R$
$BD = DM = ML = LB$, $\angle BDM = R$
$AD \parallel GH$, $AG \parallel DH = AC$, $\angle ADK = R$
$AI = DK = DC$ (Fig. 138).

Beh. $BD^2 = AD \cdot DC$.

Bew. Im rechtwinkligen Dreieck ADB ist
$BD^2 = AB^2 - AD^2$ (3, Folg.).
Da aber
$AB^2 = ADHG$ (2) und
$AD^2 = IKHG$ (Vor.) ist, so ergibt sich
$BD^2 = ADHG - IKHG$
$= ADKI$ oder
$BD^2 = AD \cdot DC$.

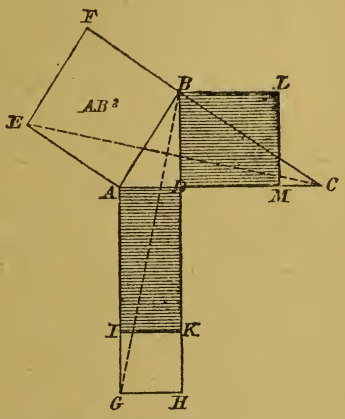


Fig. 138.

6) Aufgaben. a) Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln (vgl. § 31, 6).

Gegeben ist ein Rechteck mit den Seiten a und b (also a · b — Fig. 139, I und II).

Erste Konstruktion (Fig. 139, I).

Man verlängere die kürzere Seite AB (b) und trage von A aus auf ihr a ab ($AC = a$). Dann beschreibe man den Halbkreis

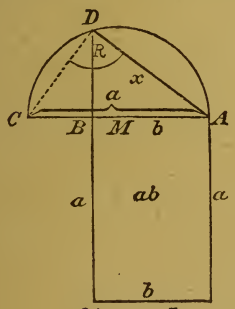


Fig. 139 I.

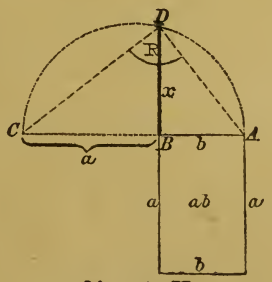


Fig. 139 II.

über AC als dem Durchmesser, verlängere die andere Rechtecksseite (a), bis die Verlängerung den Halbkreis in D schneidet, und ziehe DA.

Beh. Das Quadrat über AD ist gleich dem gegebenen Rechteck ($AD^2 = x^2 = a \cdot b$).

Bew. Zieht man DC, so ist $\angle CDA = R$ (§ 18, 13), also $AD^2 = a \cdot b$ nach dem Kathetensatze (2).

Zweite Konstruktion (Fig. 139, II). Man verlängere AB (b) und trage von B aus a ab ($BC = a$). Dann konstruiere man den Halbkreis über AC als dem Durchmesser und verlängere die andere Rechtecksseite (a) über B hinaus, bis sie den Halbkreis in D schneidet.

Beh. Das Quadrat über BD ist gleich dem gegebenen Rechteck ($BD^2 = x^2 = a \cdot b$).

Bew. Zieht man DA und DC, so ist $\angle CDA = R$ (§ 18, 13), also $BD^2 = a \cdot b$ nach dem Höhensatze (5).

Anmerkung. Hiernach kann in Verbindung mit § 31, 9 und 10 jedes Vieleck in ein Quadrat verwandelt werden (**Quadratur** der Vielecke). Dagegen ist es nicht möglich, einen Kreis in ein Quadrat zu verwandeln (**Quadratur** des Kreises, vgl. § 40, 6).

b) Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck mit gegebener Seite zu verwandeln.

7) **Der Projektionssatz.** Projiziert man die begrenzten Schenkel eines Winkels aufeinander, so sind die Rechtecke aus je einem Schenkel und der Projektion des andern auf ihn einander gleich.

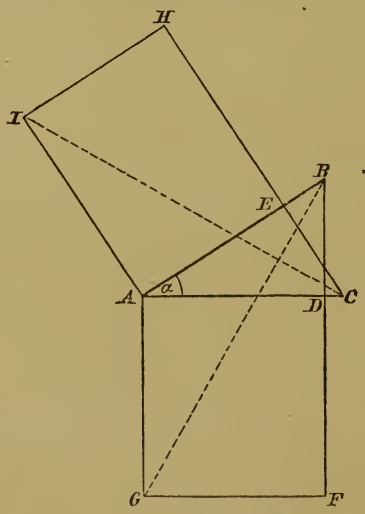


Fig. 140 I.

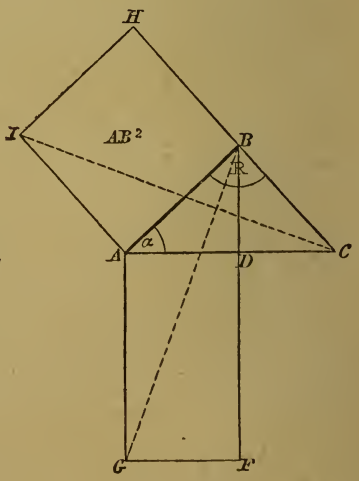


Fig. 140 II.

Vor. AB und AC sind die beiden Schenkel eines Winkels α, AD und AE ihre Projektionen aufeinander, ADFG ist das Rechteck aus AC und AD, AEHI das Rechteck aus AB und AE (Fig. 140, I, II, III und IV: in II fällt der Punkt E mit B zusammen).

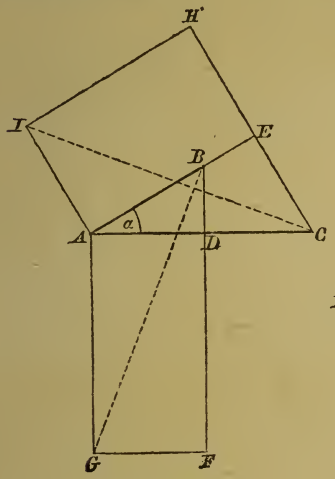


Fig. 140 III.

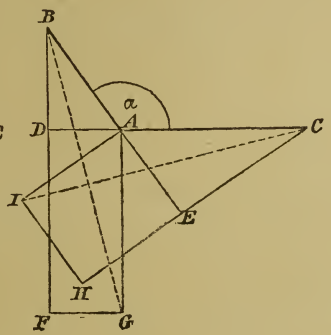


Fig. 140 IV.

Beh. $AEHI = ADFG$.

Bew. Zieht man noch BG und CI,

so ist $\triangle BAG = \frac{ADFG}{2}$

und $\triangle CAI = \frac{AEHI}{2}$ (§ 31, 3 Folg. 1).

Da nun aber $\triangle BAG \cong \triangle IAC$ (I) ist,
so ist auch $2 \triangle BAG = 2 \triangle IAC$,
d. h. $ADFG = AEHI$.

8) **Der allgemeine pythagoreische Lehrsatz.**

1. Im stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Gegenseite des **stumpfen** Winkels gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, **vermehrt** um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

2. In jedem Dreieck ist das Quadrat über der Gegenseite eines **spitzen** Winkels gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten, **vermindert** um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

Vor. 1. $\alpha > R$ (u. ſ. w. — Fig. 141, I).
2. $\alpha < R$ (u. ſ. w. — Fig. 141, II).

Beh. 1. $a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot ADEF\ (AGHI)$.
2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot ADEF\ (AGHI)$.

Bew. Wendet man den Projektionsſatz (7) auf die Schenkel der Winkel β und γ an, ſo erhält man

$$a \cdot p = BFEK$$
$$a \cdot q = CIHL,$$

folglich $a \cdot p + a \cdot q = BFEK + CIHL$.

Es iſt alſo in Fig. I $a^2 = b^2 + ADEF + c^2 + AGHI$,
in Fig. II $a^2 = b^2 - ADEF + c^2 - AGHI$.

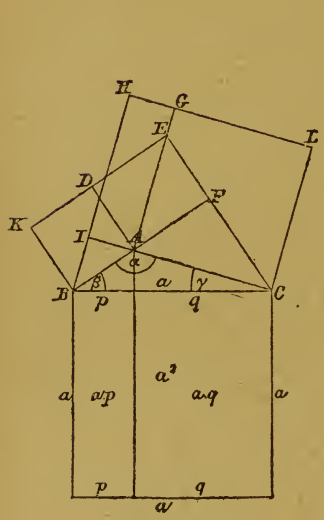


Fig. 141 I.

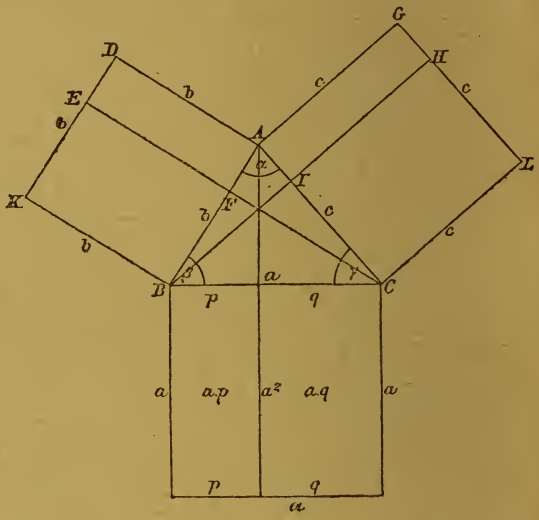


Fig. 141 II.

Wendet man aber den Projektionsſatz auf die Schenkel des Winkels α an, ſo iſt $ADEF = AGHI$, und es ergibt ſich

für I $a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot ADEF\ (AGHI)$,
für II $a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot ADEF\ (AGHI)$.

Wie lautet (entſprechend 4) die Umkehrung des allgemeinen pythagoreiſchen Lehrſatzes?

Siebenter Abschnitt. Proportionalität von Strecken und Ähnlichkeit von Figuren.

§ 34. Von der Proportionalität der Strecken.

1) Zwei oder mehr einander in einem Punkte schneidende Gerade werden auch **Strahlen** genannt; sie bilden ein **Strahlenbüschel.** Ihr Schnittpunkt heißt **Scheitel** des Strahlenbüschels.

SA, SA′, SA″ bilden ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel S (Fig. 142).

Wird ein Strahlenbüschel von einer Geraden geschnitten, so heißen die Abschnitte zwischen dem Scheitelpunkte und den Schnittpunkten mit der Geraden **entsprechende Längen der Strahlen.**

SA, SA′, SA″ oder SB, SB′, SB″ oder SC, SC′, SC″ sind entsprechende Längen der drei Strahlen (Fig. 142).

Wird ein Strahlenbüschel von Parallelen geschnitten, so heißen die von denselben Parallelen begrenzten Abschnitte **entsprechende Abschnitte der Strahlen,** die von denselben Strahlen begrenzten Abschnitte der Parallelen **entsprechende Abschnitte der Parallelen.**

AB, A′B′, A″B″ oder BC, B′C′, B″C″ oder AC, A′C′, A″C″ sind entsprechende Abschnitte der drei Strahlen (Fig. 142),

AA′, BB′, CC′ oder AA″, BB″, CC″ oder A′A″, B′B″, C′C″ sind entsprechende Abschnitte der Parallelen (Fig. 142).

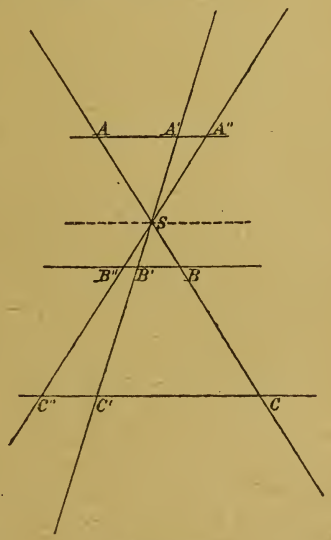


Fig. 142.

Die Längen der Strahlen können auch als Abschnitte betrachtet werden, wenn man sich durch den Scheitelpunkt die Parallele gezogen denkt.

2) **Hilfssatz.** Werden zwei Strahlen von Parallelen geschnitten und sind dabei die Abschnitte des einen Strahles einander gleich, so sind auch die entsprechenden Abschnitte des anderen Strahles einander gleich.

Vor. $AB = SC = CD = EF$, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD' \parallel EE' \parallel FF'$ (Fig. 143).

Beh. $A'B' = SC' = C'D' = E'F'$.

Bew. Zieht man $B'I$, $C'K$ und $E'L$ parallel zu AB, so ist $B'I = AB$ (§ 20, 2b), ebenso $C'K = CD$, $E'L = EF$. Also ist $\triangle A'B'I \cong \triangle C'SC \cong \triangle D'C'K \cong \triangle F'E'L$ (II). Hieraus folgt aber $A'B' = SC' = C'D' = E'F'$.

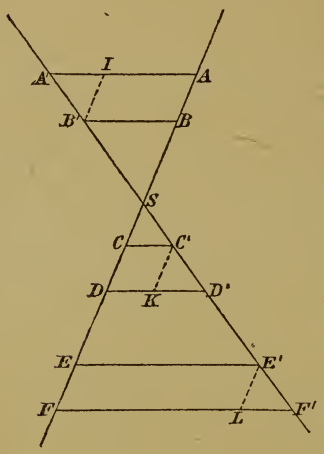


Fig. 143.

Eine Anwendung dieses Satzes ist bereits in § 31, 4 gemacht worden.

Erklärungen. Verhältnis zweier Strecken heißt der Quotient ihrer Maßzahlen.

Dabei ist vorausgesetzt, daß beide Strecken mit derselben Maßeinheit gemessen sind.

Der Wert des Verhältnisses ist unabhängig von der gewählten Maßeinheit.

Eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen heißt **Proportion.**

3) **Der Strahlensatz.** Werden zwei Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich

a) die Abschnitte des einen Strahles zueinander wie die entsprechenden des anderen,

b) die Parallelenabschnitte zueinander wie die zugehörigen Längen eines Strahles.

Vor. $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ (Fig. 144, I und II).

Beh. a) $AB : BC = A'B' : B'C'$, b) $AA' : BB' = SA' : SB' = SA : SB$.

Bew. von a)

I. AB und BC sind kommensurabel (Fig. 144, I; vgl. § 32, 3 und § 32, 5 I. Beweis).

Das gemeinsame Maß sei in AB m (4) mal und in BC n (3) mal enthalten. Man trage es dann auf AB und BC von A und B aus ab und ziehe durch die Teilpunkte die Parallelen

zu A′A. Da diese (nach 2) auch auf A′B′ und B′C′ m und n gleiche Teile abschneiden, so verhält sich sowohl

$$AB : BC = m : n \quad (4:3)$$

als auch $A'B' : B'C' = m : n$ (4:3),

folglich $AB : BC = A'B' : B'C'$.

II. AB und BC sind inkommensurabel (Fig. 144, II; vgl. § 32, 5 II. Beweis).

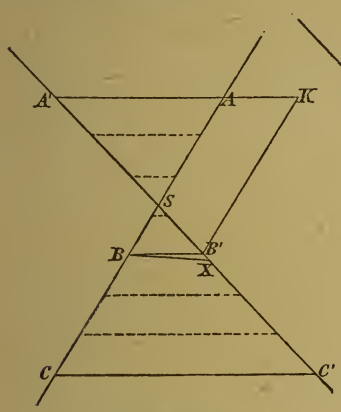


Fig. 144 I.

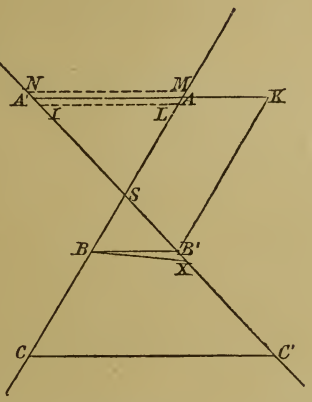


Fig. 144 II.

Man denke sich BC in n (eine große Anzahl!) gleiche Teile geteilt und einen solchen Teil von B aus auf BA wiederholt abgetragen. Dann wird ein Teilpunkt, z. B. der m-te (L) noch vor A, der nächste (M) schon hinter A fallen. Es ist daher

$$LB < AB < MB,$$

also auch $$\frac{LB}{BC} < \frac{AB}{BC} < \frac{MB}{BC}$$

oder $$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC} < \frac{m+1}{n}.$$

Denkt man sich nun wieder durch alle Teilpunkte die Parallelen zu A′A gezogen, so zerlegen diese (nach 2) die Strecke IB′ in m und die Strecke NB′ in (m + 1) gleiche Strecken.

Man erhält $$IB' < A'B' < NB',$$

also auch $$\frac{IB'}{B'C'} < \frac{A'B'}{B'C'} < \frac{NB'}{B'C'}$$

oder $$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'} < \frac{m+1}{n}.$$

Dann ist

$$\frac{AB}{BC} - \frac{A'B'}{B'C'} < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} \text{ oder } < \frac{1}{n}.$$

Da man aber n beliebig groß wählen kann, so ist $\frac{1}{n}$ beliebig klein, und darum ist nach § 32, 5 Erklärung

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Bew. von b).

Zieht man B'K parallel zu BA bis zum Schnittpunkte K mit der Verlängerung von A'A, so erhält man durch Anwendung von a) auf die Strahlen A'B' und A'K mit den Parallelen SA und B'K

$$A'A : AK = A'S : SB'$$

oder, da $AK = B'B$ ist (§ 20, 2b),

$$A'A : B'B = A'S : B'S.$$

4) Lehrsatz. Teilt eine Gerade zwei von Parallelen begrenzte Strahlenabschnitte [zwei Dreiecksseiten] nach demselben Verhältnis, so ist sie den Parallelen [der dritten Dreiecksseite] parallel.

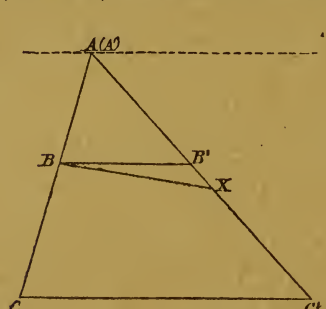


Fig. 145.

Vor.

$A'A \parallel CC'$ } (Fig. 144), oder
$AB : BC = A'B' : B'C'$ }

ACC' ist ein Dreieck } (Fig. 145).
$AB : BC = AB' : B'C'$ }

Beh. $BB' \parallel CC'$.

Bew. (indirekt). Wäre BB' nicht parallel CC', so könnte man durch B eine andere Gerade, z. B. BX, parallel zu CC' ziehen.

Dann wäre nach dem Strahlensatze (Lehrs. 3, a)
in Fig. 144 $AB : BC = A'X : XC'$,
und nach der Voraussetzung $AB : BC = A'B' : B'C'$,
also auch $A'X : XC' = A'B' : B'C'$, und durch Addition von 1 auf beiden Seiten $\frac{A'C'}{XC'} = \frac{A'C'}{B'C'}$.

In Fig. 145 wäre $AB:BC = AX:XC'$,
und nach der Vor. $AB:BC = AB':B'C'$,
also auch $AX:XC' = AB':B'C'$,
und daher $\frac{AC'}{XC'} = \frac{AC'}{B'C'}$.

Also muß in beiden Figuren $C'X = C'B'$ sein, folglich die durch B zu CC′ gezogene Parallele durch B′ gehen, d. h. es ist $BB' \parallel CC'$.

5) Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele (in Fig. 146 $DE \parallel BC$), so ergibt der Strahlensatz (Lehrs. 3, a) zunächst die folgenden **Proportionen am Dreieck**:

I. $AD:DB = AE:EC$,

d. h. die Abschnitte der einen geschnittenen Seite verhalten sich zueinander wie die der anderen;

II. $AB:AD = AC:AE$,

d. h. die eine geschnittene Seite verhält sich zu ihrem **oberen** Abschnitte, wie die andere geschnittene Seite zu ihrem oberen Abschnitte;

III. $AB:DB = AC:EC$,

d. h. die eine geschnittene Seite verhält sich zu ihrem **unteren** Abschnitte, wie die andere geschnittene Seite zu ihrem unteren Abschnitte.

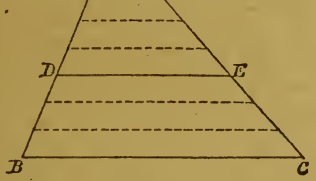


Fig. 146.

Vertauscht man in diesen Proportionen die Innenglieder (§ 48, 7 a), so ergibt sich ferner:

IV. $AD:AE = DB:EC$,

d. h. die oberen Abschnitte verhalten sich zueinander wie die unteren Abschnitte;

V. $AB:AC = AD:AE$,

d. h. die geschnittenen Seiten verhalten sich zueinander wie ihre oberen Abschnitte;

VI. $AB:AC = DB:EC$,

d. h. die geschnittenen Seiten verhalten sich zueinander wie ihre unteren Abschnitte.

Aus dem zweiten Teile des Strahlensatzes (Lehrs. 3, b) ergibt sich endlich:

VII. $DE:BC = AD:AB = AE:AC$,

d. h. die Parallele verhält sich zu der ihr parallelen Seite wie ein oberer Abschnitt zu seiner ganzen Seite.

Verhält sich $AD:DB = AE:EC = m:n$ (5:3),
so ergibt sich $AB:DB = AC:EC = (m+n):n$ (8:3),
$AB:AD = AC:AE = (m+n):m$ (8:5),
$DE:BC = AD:AB = m:(m+n)$ (5:8).

6) **Erklärung.** Eine Strecke wird durch jeden auf ihr selbst liegenden Punkt **innen**, durch jeden auf ihren Verlängerungen liegenden Punkt **außen** geteilt.

Abschnitte der Strecke heißen die Abstände des Teilpunktes von den Endpunkten der Strecke.

Bei der inneren Teilung ist das Ganze gleich der **Summe**, bei der äußeren gleich der **Differenz** der Abschnitte.

In Fig. 147, I sind AX und BX die Abschnitte der **innen**, in Fig. 147, II die der **außen** geteilten Strecke AB.

Aufgabe. Eine gegebene Strecke (innen oder außen) nach dem Verhältnis zweier gegebenen Strecken (m:n) zu teilen.

Gegeben sind eine Strecke AB und zwei andere Strecken m und n (Fig. 147, I und II).

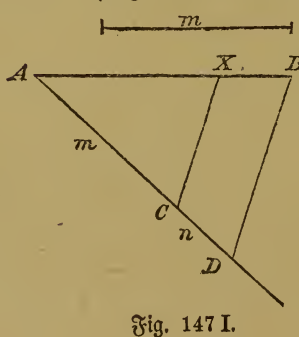


Fig. 147 I.

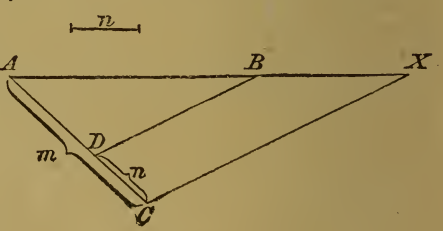


Fig. 147 II.

Konstr. Man trage auf einem durch A beliebig gezogenen Strahle von A aus m ab (AC = m) und von C aus n (CD = n), ziehe DB und ziehe CX parallel zu DB.

Beh. $AX:BX = m:n$.

Bew. Er folgt für Fig. 147, I aus 5, I und für Fig. 147, II aus 5, III.

Anmerkung. Soll eine gegebene Strecke nach dem Verhältnis zweier gegebener Zahlen (z. B. 5 : 2) geteilt werden, so ersetze man dieses Zahlenverhältnis durch das Verhältnis 5s : 2s, wo s eine beliebig gewählte Strecke bedeutet.

7) **Erklärung. Vierte Proportionale** zu drei gegebenen Strecken m, n und p heißt diejenige Strecke x, die der Gleichung $m : n = p : x$ genügt.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu konstruieren.

Gegeben sind die drei Strecken m, n und p (Fig. 148).

Konstr. Man trage auf dem einen von zwei beliebigen Strahlen vom Scheitel aus m und n (AB = m, AC = n), auf dem anderen p ab (AD = p), ziehe BD und ziehe CE parallel zu BD.

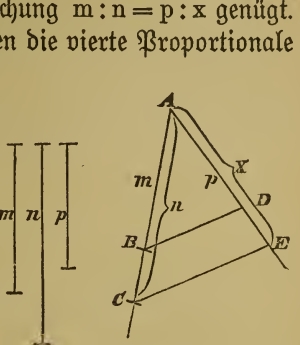


Fig. 148.

Beh. AE ist die vierte Proportionale zu m, n und p.

Bew. Nach 5, II ist AB : AC = AD : AE,

also auch m : n = p : AE.

Dieselbe Aufgabe läßt sich auch mit Benutzung der anderen Proportionen am Dreieck (5) lösen.

Anmerkung. Wegen der Vertauschbarkeit der Innenglieder (§ 48, 7a) ist die Aufgabe m : p = n : x mit der gelösten identisch. Dagegen sind in den Gleichungen n : m = p : x (oder n : p = m : x) und p : m = n : x (oder p : n = m : x) andere Aufgaben enthalten. Es kommt also auf die Reihenfolge von m, n, p an.

8) **Lehrsatz.** Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels [Außenwinkels] teilt die Gegenseite innen [außen] nach dem Verhältnis der anliegenden Seiten.

Vor. $\iota = \varkappa$ (Fig. 149, I und II).

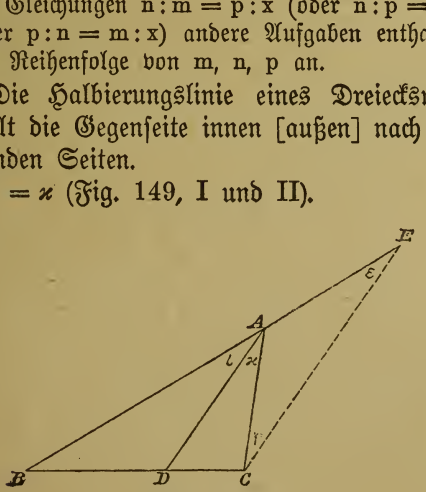


Fig. 149 I.

Beh. $DB : DC = AB : AC$.

Bew. Man ziehe CE parallel zu DA.

Dann ist $\iota = \varepsilon$ (§ 12, 5, a)

und $\varkappa = \varphi$ (§ 12, 5, b);

folglich $\varepsilon = \varphi$ (da n. d. Vor. $\iota = \varkappa$ ist).

Also ist auch $AE = AC$ (§ 15, 6).

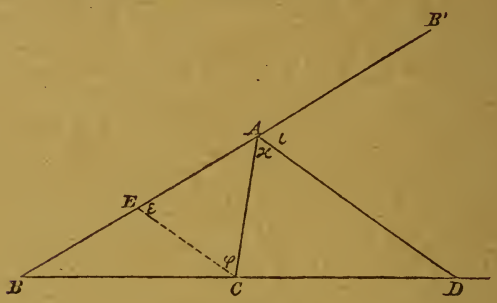


Fig. 149 II.

Betrachtet man nun die Strahlen BE und BC mit den Parallelen CE und DA, so folgt aus dem Strahlensatze (3a)

$$BD : DC = AB : AE.$$

Also verhält sich auch $BD : DC = AB : AC$.

Umkehrung. Ist eine Dreiecksseite innen [außen] nach dem Verhältnis der anliegenden Seiten geteilt, so halbiert die vom Teilpunkte nach der Gegenecke gezogene Gerade den Winkel des Dreiecks [den Außenwinkel].

Beweis indirekt.

9) Lehrsatz. Zwei Mittellinien eines Dreiecks teilen einander so, daß der obere Abschnitt einer jeden sich zu dem unteren Abschnitte wie 2 : 1 verhält (§ 19, 4).

Vor. $AD = DC$, $AE = EB$ (Fig. 150).

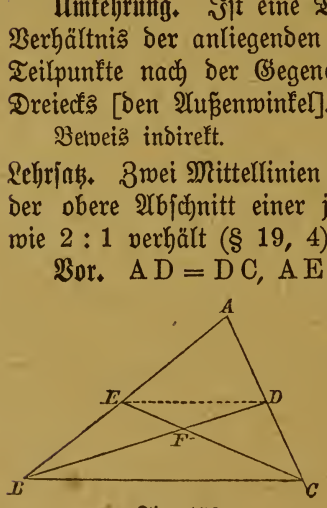


Fig. 150.

Beh. $BF : FD = CF : FE = 2 : 1$.

Bew. Zieht man ED, so ist $ED \parallel BC$ (4); daraus folgt

$ED : BC = AE : AB$ (Lehrs. 3b)

$= 1 : 2$ (Vor.).

Betrachtet man nun die Strahlen EC und DB als durch die Parallelen ED und BC geschnitten, so ergibt sich (wieder nach 3, Lehrs.) $BF : FD = CF : FE = BC : DE = 2 : 1$.

10) **Ort.** Der Ort für alle Punkte, deren Abstände von den Schenkeln eines gegebenen Winkels ein gegebenes Verhältnis $m : n$ haben, ist eine durch den Scheitel des Winkels gehende Gerade.

Wie ist diese Gerade zu konstruieren?

11) **Erklärung.** Zwei Gruppen von Größen heißen **proportional**, wenn je zwei entsprechende Größen dasselbe Verhältnis haben.

12) **Lehrsatz.** Jedes Strahlenbüschel bildet auf zwei Parallelen proportionale Abschnitte.

Vor. $BE \parallel B'E'$ (Fig. 151).

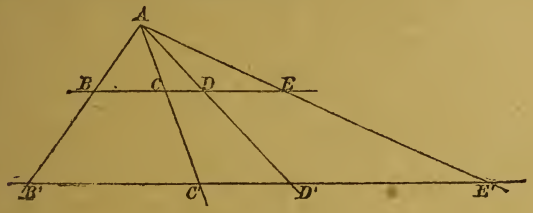


Fig. 151.

Beh. $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} \left(= \frac{BD}{B'D'} \text{ u. s. f.} \right)$.

Bew. Da $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{AC'}$ und $\frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{AC'}$ } (3, Lehrs. b) ist,

so ist auch $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$ u. s. w.

Durch Vertauschung der Mittelglieder ergibt sich auch $BC : CD = B'C' : C'D'$ u. s. w.

§ 35. Von der Ähnlichkeit der Dreiecke und Vielecke.

1) **Erklärung.** Zwei Vielecke heißen ähnlich ($\sim$), wenn sie gleiche Winkel zwischen proportionalen Seiten haben.

Anmerkung. Kongruente Vielecke (§ 15, 1) haben gleiche Winkel zwischen gleichen Seiten. Die Kongruenz ist also der besondere Fall der Ähnlichkeit, daß das allgemeine Verhältnis $m : n$ der entsprechenden Seiten den besonderen Wert $1 : 1$ hat.

Folgerung. Sind zwei Figuren einer dritten ähnlich, so sind sie auch einander ähnlich.

2) **Lehrsatz.** Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele, so ist das entstehende Dreieck dem ursprünglichen ähnlich.

Vor. $DE \parallel BC$ (Fig. 152).

Beh. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Bew. Den Dreiecken ADE und ABC ist der Winkel α gemeinsam, und nach § 12, 4a ist $\delta = \beta$ und $\varepsilon = \gamma$. Zweitens ist nach dem Strahlensatze (§ 34, 3a und b)

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC};$$

folglich sind die Dreiecke ähnlich.

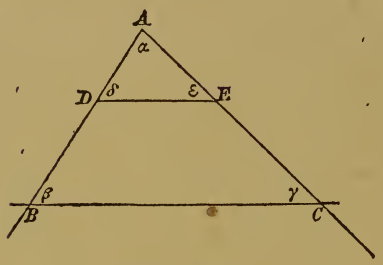


Fig. 152.

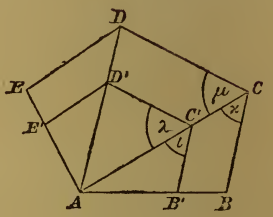


Fig. 153.

3) **Aufgabe.** Ein Vieleck zu zeichnen, das einem gegebenen ähnlich ist.

Gegeben ist das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 153).

Konstr. Man ziehe zuerst die Diagonalen AC und AD, darauf $B'C'$ parallel zu BC, $C'D'$ parallel zu CD und endlich $D'E'$ parallel zu DE.

Beh. $AB'C'D'E' \sim ABCDE$.

Bew. $\angle AB'C' = \angle ABC$ (§ 12, 4a),

Da ferner $\left.\begin{matrix} \iota = \varkappa \\ \text{und } \lambda = \mu \end{matrix}\right\}$ ist (§ 12, 5a),

so ist auch $\iota + \lambda = \varkappa + \mu$ oder $\angle B'C'D' = \angle BCD$ u. s. f.

Da sich $\left.\begin{matrix} B'C' : BC = AC' : AC \\ \text{und } C'D' : CD = AC' : AC \end{matrix}\right\}$ verhält,

so verhält sich auch $B'C' : BC = C'D' : CD$ u. s. f.

Die Vielecke sind also ähnlich.

4) **Erklärung. Entsprechende (homologe) Seiten** in ähnlichen Dreiecken heißen solche, die gleichen Winkeln gegenüberliegen.

Entsprechende (homologe) Winkel in ähnlichen Dreiecken heißen solche, die zwischen proportionalen Seiten liegen (vgl. § 15, 1).

Folgerung. In ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Winkel gleich und die entsprechenden Seitenpaare proportional.

5) **Erster Ähnlichkeitssatz.** Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Vor. $AB:DE = AC:DF$, $\alpha = \delta$. } (Fig. 154.)
Beh. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Bew. Man trage DE von A aus auf AB ab ($AI = DE$) und ziehe IK parallel BC. Dann ergibt sich durch Einsetzen

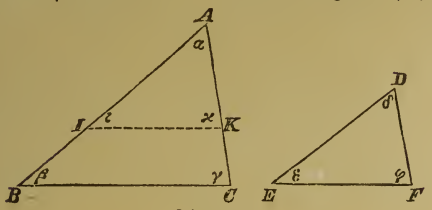


Fig. 154.

von AI für DE in die Voraussetzung $AB : AI = AC : DF$
und nach dem Strahlensatze (§ 34, 3a) $AB : AI = AC : AK$;
daraus folgt $AC : DF = AC : AK$
oder $AC : AC = DF : AK$
(§ 48, 7a), und daher $DF = AK$. Da außerdem $AI = DE$ (Konstr.) und $\alpha = \delta$ (Vor.) ist, so ist $\triangle AIK \cong \triangle DEF$ (I). Da ferner $\triangle AIK \sim \triangle ABC$ ist (Satz 2), so ist auch $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Anmerkungen. 1. Für den besonderen Fall $AB:DE = AC:DF = 1:1$ verwandelt sich der erste Ähnlichkeitssatz in den ersten Kongruenzsatz (entsprechend der dritte und vierte Ähnlichkeitssatz in den dritten und vierten Kongruenzsatz).

2. Wenn im folgenden die Ähnlichkeit der Dreiecke durch den ersten, zweiten u. s. w. Ähnlichkeitssatz begründet wird, so soll das durch die Abkürzungen (I), (II) u. s. w. geschehen (wie bei der Kongruenz. Das vorstehende Zeichen $\cong$ oder $\sim$ schließt jeden Irrtum aus).

6) **Zweiter Ähnlichkeitssatz.** Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

Vor. $\alpha = \delta$, $\beta = \varepsilon$ (Fig. 154).
Beh. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
Bew. Hilfskonstruktion wie beim ersten Ähnlichkeitssatze (5).
Da $\iota = \beta$ ist (Gegenwinkel an Parallelen)
und $\varepsilon = \beta$ (Voraussetzung),
so ist auch $\iota = \varepsilon$.
Da außerdem $AI = DE$ (Konstruktion)
und $\alpha = \delta$ (Voraussetzung) ist,
so ist $\triangle AIK \cong \triangle DEF$ (II).
Da ferner $\triangle AIK \sim \triangle ABC$ ist (Satz 2),
so ist auch $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

7) **Dritter Ähnlichkeitssatz.** Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen der drei Seiten übereinstimmen.

Vor. $AB : DE = BC : EF = AC : DF$ (Fig. 154).

Beh. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Bew. Hilfskonstruktion wie beim ersten Ähnlichkeitssatze (5). Durch Einsetzen von AI für DE in die Voraussetzung ergibt sich $AB : AI = BC : EF = AC : DF$

und nach dem Strahlensatze (§ 34, 3a und b)

$AB : AI = BC : IK = AC : AK$;

daraus folgt sowohl $BC : EF = BC : IK$, d. h. $EF = IK$,

als auch $AC : DF = AC : AK$, d. h. $DF = AK$.

Folglich ist $\triangle AIK \cong \triangle DEF$ (III).

Da ferner $\triangle AIK \sim \triangle ABC$ ist (Satz 2),

so ist auch $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

8) **Vierter Ähnlichkeitssatz.** Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Vor. $AB > AC$, $AB : DE = AC : DF$, $\gamma = \varphi$ (Fig. 154).

Beh. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Bew. Hilfskonstruktion wie beim ersten Ähnlichkeitssatze. Durch Einsetzen von AI für DE in die Voraussetzung ergibt sich

$AB : AI = AC : DF$

und nach dem Strahlensatze (§ 34, 3a)

$AB : AI = AC : AK$;

daraus folgt $AC : DF = AC : AK$, d. h. $DF = AK$.

Da ferner $\varkappa = \gamma$ (Gegenwinkel an Parallelen)

und $\varphi = \gamma$ (Voraussetzung) ist,

so ist auch $\varkappa = \varphi$.

Folglich ist $\triangle AIK \cong \triangle DEF$ (IV).

Da ferner $\triangle AIK \sim \triangle ABC$ ist (Satz 2),

so ist auch $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

9) **Erklärung. Entsprechende (homologe) Stücke in ähnlichen Dreiecken** (und Vielecken) heißen solche, die für entsprechende Seiten und Winkel der Dreiecke (und Vielecke) durch dieselbe Konstruktion erhalten werden.

Entsprechende Linien sind z. B. die Höhen auf entsprechende Seiten (in den ähnlichen Dreiecken ABC und $A'B'C'$ der Fig. 155 also AH und $A'H'$), die Mittellinien (§ 19, 3) nach den Mitten entsprechender Seiten (in Fig. 155 also AM und $A'M'$), die

Winkelhalbierenden (§ 19, 6) entsprechender Winkel; ferner die Radien der umgeschriebenen (§ 19, 8), die der eingeschriebenen (§ 24, 9), und die der an entsprechende Seiten angeschriebenen (§ 24, 13) Kreise u. s. w.

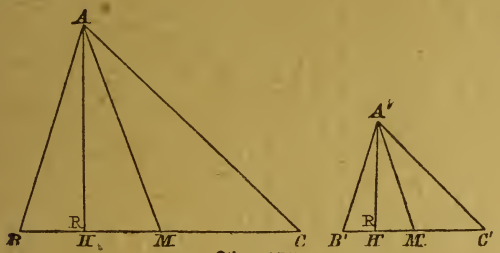


Fig. 155.

Entsprechende Winkel sind z. B. die Winkel zwischen entsprechenden Seiten und ihren Mittellinien u. s. w.

10) **Lehrsätze.**

a) Entsprechende Linien in ähnlichen Dreiecken verhalten sich zueinander wie zwei entsprechende Seiten.

So verhält sich z. B. in Fig. 155 $AH : A'H' = AB : A'B'$,

$AM : A'M' = AB : A'B'$.

b) Entsprechende Winkel in ähnlichen Dreiecken sind einander gleich.

So ist z. B. in Fig. 155 $\angle HAM = \angle H'A'M'$,

$\angle AMC = \angle A'M'C'$.

Der Beweis ist mit Benutzung der Ähnlichkeit von Teildreiecken immer leicht zu führen.

11) **Lehrsatz.** Die Flächen von Dreiecken, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich zueinander wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten (s. § 32, 6).

Vor. $\alpha = \delta$ (Fig. 156).

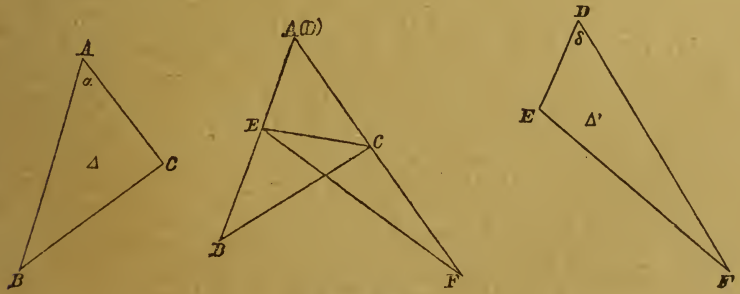


Fig. 156.

Beh. $\frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}$.

Bew. Man lege die Dreiecke mit den gleichen Winkeln aufeinander und ziehe EC.

Dann ist $\frac{ABC}{AEC} = \frac{AB}{AE}$

und $\frac{AEC}{AEF} = \frac{AC}{AF}$ (§ 32, 5, Folg. 3),

folglich $\frac{ABC}{AEF} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AC}{AF}$

oder $\frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF}$ (§ 47, 7 Zus.) $= \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}$.

12) Lehrsatz. Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich zueinander wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Vor. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (Fig. 157).

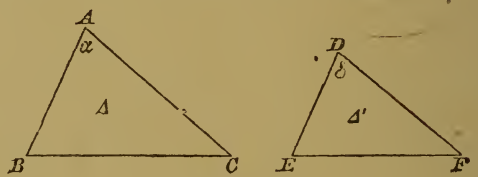


Fig. 157.

Beh. $\frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{AB^2}{DE^2}$.

Bew. Da wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\alpha = \delta$ ist, so folgt $\frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}$ (11) $= \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AC}{DF}$ (§ 47, 7 Zus.).

Da wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ferner

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

ist, so kann man für $\frac{AC}{DF}$ setzen $\frac{AB}{DE}$, und man erhält

$$\frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE}$$

oder $\frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{AB^2}{DE^2}$.

13) Hilfssatz. Ähnliche Vielecke werden durch entsprechende Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

Vor. $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ (Fig. 158).

Beh. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
$\triangle AED \sim \triangle A'E'D'$
$\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$.

Bew. Die Ähnlichkeit der äußeren Dreieckspaare folgt sofort aus dem ersten Ähnlichkeitssatze (5).

Daraus folgt ferner, daß $\iota = \iota_1$ ist.

Nun ist aber $\angle BCD = \angle B'C'D'$,

$\iota = \iota_1$,

also auch $\varkappa = \varkappa_1$.

Und da AC und A'C' entsprechende Linien sind, so ist auch

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Folglich ist $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ (I).

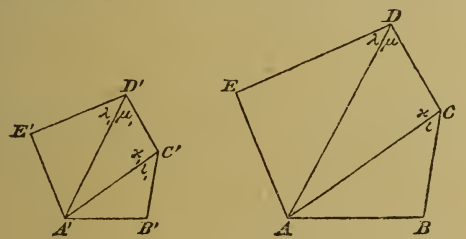


Fig. 158.

In derselben Weise läßt sich für Vielecke mit mehr als fünf Seiten die Ähnlichkeit der inneren Dreiecke beweisen.

14) Lehrsätze über ähnliche Vielecke.

a) Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich zueinander wie entsprechende Seiten.

b) Die Flächen ähnlicher Vielecke verhalten sich zueinander wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Vor. $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ (Fig. 158). Mit u und u' sollen die Umfänge, mit F und F' die Flächen bezeichnet sein.

Beh. a) $u : u' = AB : A'B'$. b) $F : F' = AB^2 : A'B'^2$.

Bew. a) Mit der Ähnlichkeit ist vorausgesetzt

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Also ergibt sich mit Anwendung von § 48, 12

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'} = \frac{AB}{A'B'},$$

d. h. $u : u' = AB : A'B'$.

b) Aus den Lehrsätzen 13) und 12) folgt:

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

$$\frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{CD^2}{C'D'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

$$\frac{ADE}{A'D'E'} = \frac{DE^2}{D'E'^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

Also ergibt sich $\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{ADE}{A'D'E'}$

und mit Anwendung von § 48, 12

$$\frac{ABC + ACD + ADE}{A'B'C' + A'C'D' + A'D'E'} = \frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2},$$

d. h. $F : F' = AB^2 : A'B'^2$.

§ 36. Anwendungen der Ähnlichkeitssätze.

1) **Erklärung.** Mittlere Proportionale zwischen zwei Strecken a und b heißt diejenige Strecke x, die der Gleichung $a : x = x : b$ genügt (vgl. § 48, 13).

2) **Lehrsätze.** Im rechtwinkligen Dreieck ist

a) jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen ihrer Projektion auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse,

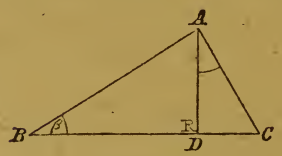


Fig. 159.

b) die Höhe die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse (oder zwischen den Projektionen der beiden Katheten auf die Hypotenuse).

Vor. $\angle BAC = R$, $AD \perp BC$ (Fig. 159).

Beh. a) $BD : AB = AB : BC$, $CD : AC = AC : BC$,
b) $BD : AD = AD : CD$.

Bew. a) Es ist $\triangle BDA \sim \triangle BAC$ (II), da beide Dreiecke einen Rechten und den Winkel β enthalten; daraus folgt

$$BD : AB = AB : BC.$$

Ebenso ist $\triangle CDA \sim \triangle CAB$ (II);
folglich $CD : AC = AC : BC$.

b) Da $\triangle BDA \sim \triangle ADC \sim \triangle BAC$ ist,
so folgt $BD : AD = AD : CD$.

3) **Aufgabe.** Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu konstruieren.

Gegeben sind zwei Strecken a und b (Fig. 160).

Erste Konstruktion (Fig. 160, I). ($b < a$).

Man beschreibe den Halbkreis über a (AC) als dem Durchmesser, trage von C aus b auf a ab ($CB = b$), errichte in B das Lot BD auf CA und verbinde den Schnittpunkt D mit C.

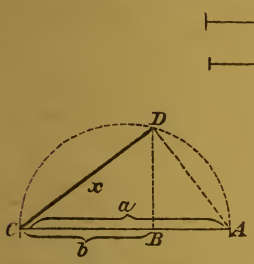


Fig. 160 I.

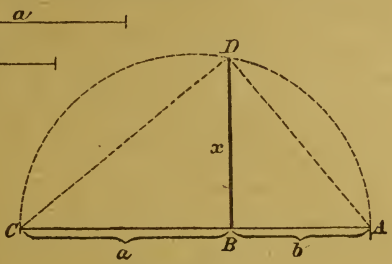


Fig. 160 II.

Beh. $a : CD = CD : b$.

Bew. Der Beweis folgt aus 2, Lehrs. a, wenn man noch DA zieht.

Zweite Konstruktion (Fig. 160, II). Man trage auf einer Geraden nacheinander a und b ab ($CB = a$, $BA = b$), beschreibe den Halbkreis über CA als dem Durchmesser und errichte in B das Lot auf AC bis zum Schnittpunkte D mit dem Halbkreise.

Beh. $a : BD = BD : b$.

Bew. Der Beweis folgt aus 2, Lehrs. b, wenn man noch DA und DC zieht.

Anmerkung. Aus der Gleichung $a : x = x : b$ folgt nach § 48, 6 auch $x^2 = a \cdot b$.

Die eben gelöste Aufgabe enthält daher die Lösung der bereits früher (§ 33, 6) behandelten: Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln (vgl. Fig. 139).

4) **Der Sehnensatz.** Schneiden einander zwei Sehnen eines Kreises, so ist das Produkt (Rechteck) aus den Abschnitten der einen Sehne gleich dem Produkte (Rechteck) aus den Abschnitten der anderen.

Vor. $\angle AEB = \angle CED = 2R$, $AM = BM = CM = DM$ (Fig. 161).

Beh. $EA \cdot EB = EC \cdot ED$.

Bew. Zieht man AC und BD, so ist $\varepsilon = \varepsilon'$ (Scheitelwinkel) und $\gamma = \beta$ (§ 25, 2 Folg. 2); daher ist $\triangle ECA \sim \triangle EBD$ (II).

Daraus folgt $AE:ED = CE:EB$,
oder (nach § 48, 6) $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Aufgabe. Mit Benutzung des Sehnensatzes zu drei Strecken m, n und p die vierte Proportionale zu konstruieren (Fig. 161; aus $m:n = p:x$ folgt $m \cdot x = n \cdot p$).

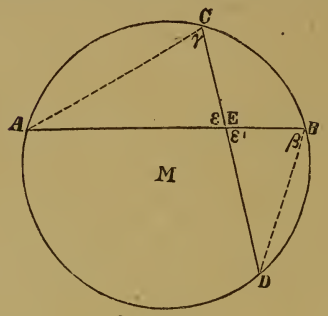


Fig. 161.

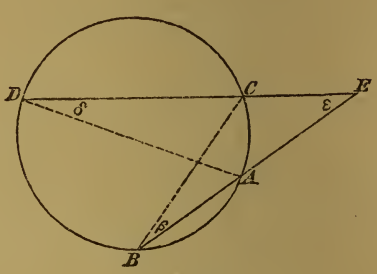


Fig. 162.

5) **Lehrsatz** (Umkehrung des Sehnensatzes). Teilen zwei Strecken einander innen so, daß die Produkte ihrer Abschnitte einander gleich sind, so läßt sich durch ihre vier Endpunkte ein Kreis legen (vgl. § 23, 5, Anm. 3).

Beweis indirekt.

6) **Der Sekantensatz.** Schneiden einander zwei Sekanten außerhalb eines Kreises, so sind die Produkte (Rechtecke) aus jeder Sekante und ihrem äußeren Abschnitte einander gleich.

Vor. In E schneiden sich die Sekanten AB und CD (Fig 162).

Beh. $EA \cdot EB = EC \cdot ED$.

Bew. Zieht man AD und BC, so ist $\varepsilon = \varepsilon$ und $\beta = \delta$ (§ 25, 2, Folg. 2); daher ist $\triangle EBC \sim \triangle EDA$ (II).

Daraus folgt $EA:EC = ED:EB$
oder (nach § 48, 6) $EA \cdot EB = EC \cdot ED$.

Aufgabe. Mit Benutzung des Sekantensatzes soll zu drei Strecken die vierte Proportionale konstruiert werden.

7) **Lehrsatz** (Umkehrung des Sekantensatzes). Teilen zwei Strecken einander außen so, daß die Produkte ihrer Abschnitte einander gleich sind, so läßt sich durch ihre vier Endpunkte ein Kreis legen (vgl. § 23, 5, Anm. 3).

Beweis indirekt.

8) Dreht sich in Fig. 162 die Sekante EB um den Punkt E so, daß der Winkel ε wächst, so rücken ihre Schnittpunkte mit dem Kreise, A und B, einander näher, bis schließlich A mit B zusammen-

fällt. Die Gleichung $EA \cdot EB = EC \cdot ED$ (6) verwandelt sich dann in die Gleichung $EB^2 = EC \cdot ED$. Diese lautet in anderer Form $EC:EB = EB:ED$. Sie enthält bereits den folgenden Tangentensekantensatz.

9) **Der Tangentensekantensatz.** Schneiden einander eine Tangente und eine Sekante eines Kreises, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte (oder das Quadrat der Tangente ist gleich dem Rechteck aus der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte).

Vor. In E schneiden einander die Tangente EB und die Sekante ED (Fig. 163).

Beh. $EC:EB = EB:ED$.

Bew. Zieht man noch BC und BD, so ist $\tau = \delta$ (§ 25, 7). Da außerdem $\varepsilon = \varepsilon$ ist, so ist $\triangle ECB \sim \triangle EBD$ (II), folglich $EC:EB = EB:ED$.

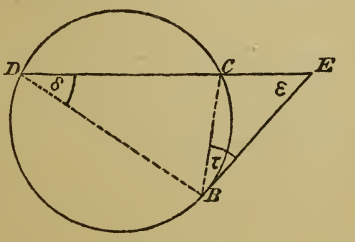


Fig. 163.

Aufgabe. Mit Benutzung des Tangentensekantensatzes soll zu zwei Strecken die mittlere Proportionale konstruiert werden.

10) **Lehrsatz** (Umkehrung des Tangentensekantensatzes). Wird eine Strecke außen durch den einen Endpunkt einer zweiten Strecke so geteilt, daß die zweite die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der ersten ist, so wird der durch die beiden Endpunkte der ersten Strecke und den anderen Endpunkt der zweiten Strecke gelegte Kreis von der zweiten Strecke berührt.

Beweis indirekt.

11) **Der ptolemäische*) Lehrsatz.** In jedem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen (Rechteck aus den Diagonalen) gleich der Summe der Produkte (Rechtecke) der Gegenseiten.

Bew. Bezeichnet man in dem Sehnenviereck ABCD (Fig. 164) die Seiten der Reihe nach mit a, b, c, d, die Diagonale BD mit e und AC mit f, so soll bewiesen werden, daß $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$ ist.

Man trage den Winkel DAC an AB im Punkte A nach innen an (sodaß $\angle EAB = \angle DAC$ ist). Dann ist, da auch $\angle ABE = \angle ACD$

*) Claudius Ptolemäus, 87—165 n. Chr., der größte griechische Astronom, beobachtete und lehrte in Alexandria. Seine *Μεγάλη σύνταξις* (arab. Almageſt) ist ein großes Kompendium der griechischen Astronomie (in ihm I., 9 der obige Satz). Er ist unter den Griechen der Hauptförderer der Trigonometrie, stellte auch Sehnentafeln für alle Centriwinkel von 0° bis 180° bis auf halbe Grade auf.

ist (§ 25, 2 Folg. 2), $\triangle ACD \sim \triangle ABE$ (II); daraus folgt $BE:CD = AB:AC$ oder $BE = \frac{a \cdot c}{f}$.

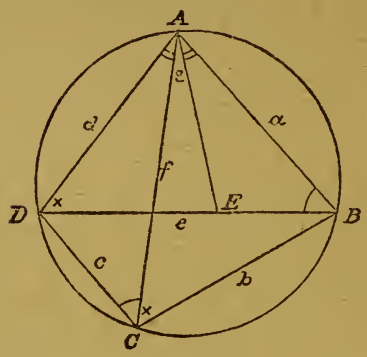


Fig. 164.

Addiert man dann zu den beiden nach der Konstruktion gleichen Winkeln noch den Winkel EAC, so wird $\angle BAC = \angle EAD$. Da aber ferner $\angle BCA = \angle EDA$ ist (wieder nach § 25, 2 Folg. 2), so ist $\triangle BAC \sim \triangle EAD$ (II). Hieraus folgt

$$DE:BC = AD:AC$$

oder $$DE = \frac{b \cdot d}{f}.$$

Durch Addition der beiden für BE und DE erhaltenen Gleichungen ergibt sich

$$e = BE + DE = \frac{a \cdot c}{f} + \frac{b \cdot d}{f} \text{ oder auch } e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d.$$

Anmerkung. Halbiert eine Diagonale einen Winkel des Sehnenvierecks, so ist die Hilfslinie (AE) entbehrlich; sonst bleibt der Beweis derselbe.

12) **Erklärung.** Eine Strecke heißt (durch einen inneren Teilpunkt) **stetig (nach stetiger Proportion) geteilt**, wenn ihr größerer Abschnitt die mittlere Proportionale (vgl. § 36, 1 Erklärung) zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt ist (**goldener Schnitt** — sectio aurea oder divina).

13) **Aufgabe.** Eine gegebene Strecke (AB = a in Fig. 165) stetig zu teilen.

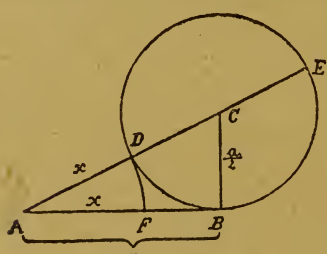


Fig. 165.

Konstr. Man errichte in B auf AB das Lot, trage auf diesem von B aus die Strecke $\frac{a}{2}$ ab $\left(BC = \frac{a}{2}\right)$ und ziehe CA. Dann beschreibe man um C mit $\frac{a}{2}$ den Kreis, der AC in D trifft, und mit AD um A den Kreis(bogen), der AB in F trifft.

Beh. $AB:AF = AF:FB$.

Bew. Nach dem Tangentensekantensatz (9) ist

$$AE:AB = AB:AD;$$

hieraus folgt aber

$$\frac{AE-AB}{AB-AD}=\frac{AB}{AD}\ (\S\ 48,10)\ \text{oder}\ \frac{AD}{FB}=\frac{AB}{AD}$$

oder $AB:AF=AF:FB$, da $AD=AF$ ist.

Achter Abschnitt. Regelmäßige Vielecke. Kreisteilung und Kreisberechnung.

§ 37. Inhaltsbestimmungen des Dreiecks.

1) **Aufgabe.** Die Höhe h und den Flächeninhalt F eines gleichseitigen Dreiecks durch seine Seite a auszudrücken.

Lösung (Fig. 166). Da die Höhe des gleichseitigen Dreiecks die Grundseite halbiert (§ 16, 2), so ergibt sich (§ 33, 3 Folg.) aus einem der beiden rechtwinkligen Dreiecke, in die das gleichseitige Dreieck durch die Höhe geteilt wird,

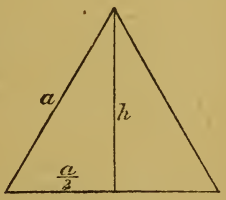


Fig. 166.

$$h^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4},$$

$$\text{also}\quad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Für die Fläche des Dreiecks ergibt sich (nach § 32, 9, 3)

$$F=\frac{a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}}{2},$$

$$F=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

2) **Aufgabe.** Den Flächeninhalt F eines gleichschenkligen Dreiecks aus der Grundseite a und dem Schenkel b zu berechnen.

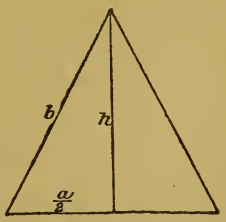


Fig. 167.

Lösung (Fig. 167).

$$\text{Da}\ h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}\ \left(\begin{matrix}\S\ 33,3\\ \text{Folg.}\end{matrix}\right)=\sqrt{\left(b-\frac{a}{2}\right)\left(b+\frac{a}{2}\right)}\ \left(\begin{matrix}\S\ 46,3\\ \text{Umkehr.}\end{matrix}\right)$$

ist, so ist $F=\frac{a}{2}\sqrt{\left(b-\frac{a}{2}\right)\left(b+\frac{a}{2}\right)}$.

Die Benutzung dieser Form der Wurzel anstatt der ursprünglichen $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$ ist in den meisten Fällen für die Ausrechnung bequemer.

§ 38. Von den regelmäßigen Vielecken.

1) Erklärung. **Regelmäßiges Vieleck** heißt ein Vieleck mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln.

2) Lehrsätze. a) Teilt man die Peripherie eines Kreises in n gleiche Teile und verbindet die Teilpunkte miteinander, so entsteht ein regelmäßiges Vieleck (ein dem Kreise eingeschriebenes n-eck).

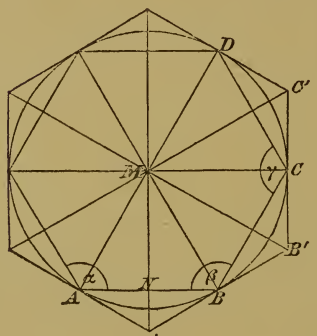


Fig. 168.

b) Zieht man durch die Teilpunkte die Tangenten an den Kreis, so bilden diese gleichfalls ein regelmäßiges Vieleck (ein dem Kreise umgeschriebenes n-eck).

Bew. (Fig. 168).

a) Daß $AB = BC = CD \ldots$ ist, folgt aus § 23, 8a; daß $\alpha = \beta = \gamma \ldots$ ist, folgt daraus, daß diese Winkel Peripheriewinkel über gleichen Bögen sind (§ 25, 2 Folg. 2).

b) Verbindet man den Mittelpunkt M mit A, B, C ... und A', B', C' ..., so ist im Viereck MAA'B, in dem zwei Winkel Rechte sind,

$$\angle AA'B = 2R - \angle AMB$$

und aus demselben Grunde

im Viereck MBB'C $\quad \angle BB'C = 2R - \angle BMC,$

folglich $\quad \angle AA'B = \angle BB'C \ldots\ldots$

Ferner ist

$\triangle MA'A \cong \triangle MA'B$ (IV), also $\angle MA'A = \angle MA'B = \frac{1}{2}\angle AA'B$

und

$\triangle MB'B \cong \triangle MB'C$ (IV), also $\angle MB'B = \angle MB'C = \frac{1}{2}\angle BB'C$;

folglich ist auch $\angle MA'B = \angle MB'B$

und $\triangle MBA' \cong \triangle MBB'$ (II. Zus.).

Folglich ist $B'B = BA' = \frac{A'B'}{2}$, und da ebenso $B'C = \frac{B'C'}{2}$ und $B'B = B'C$ ist, so folgt schließlich $A'B' = B'C' = \ldots\ldots$

Zusätze. 1. Man beschreibt in einen Kreis ein regelmäßiges Viereck (Quadrat), indem man die Endpunkte zweier aufeinander senkrechten Durchmesser verbindet; ein regelmäßiges Sechseck, indem man den Radius sechsmal hintereinander als Sehne in den Kreis einträgt (Fig. 169); ein regelmäßiges (gleichseitiges) Dreieck, indem man die abwechselnden Ecken des regelmäßigen Sechsecks miteinander verbindet.

2. Man erhält die Ecken eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen $2n$-ecks, indem man die Bögen des eingeschriebenen n-ecks halbiert (Fig. 169; dies kann nach § 23, 4b durch die Lote vom Mittelpunkte auf die Seiten des n-ecks geschehen).

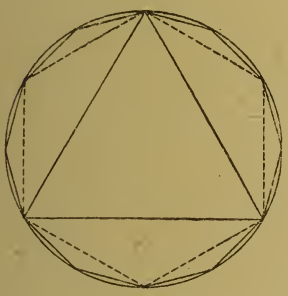


Fig. 169.

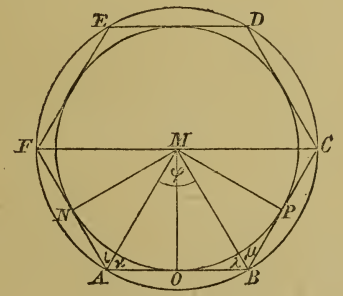


Fig. 170.

3) Lehrsatz. Um und in jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein Kreis beschreiben. (Beide Kreise haben denselben Mittelpunkt.)

Bew. Man halbiere zwei Winkel des Vielecks (Fig. 170: $\iota = \varkappa$, $\lambda = \mu$), fälle vom Schnittpunkte M der Winkelhalbierenden die Lote auf die Seiten des Vielecks (MN, MO, MP u. s. w.), und verbinde M mit den Ecken (MA, MB, MC, MF u. s. w.).

Dann ist $\varkappa = \lambda$ als Hälften gleicher Ganzen,

$\triangle ABM \cong \triangle BCM$ (I)

$\triangle ABM \cong \triangle AFM$ (I) u. s. w., also

1) $AM = BM = CM = FM$ u. s. w.
2) $MN = MO = MP$ u. s. w.

} als homologe Stücke.

Außerdem ist

3) $MN \perp AF$, $MO \perp AB$, $MP \perp BC$.

Aus 1) folgt, daß sich um das Vieleck, aus 2) und 3), daß sich auch in das Vieleck ein Kreis beschreiben läßt.

Zusätze. 1. Der Radius (MA) des umgeschriebenen Kreises heißt großer Radius (r), derjenige (MO) des eingeschriebenen Kreises kleiner Radius (ϱ) des regelmäßigen Vielecks.

Anmerkung. Hiernach läßt sich die Aufgabe lösen: Den Mittelpunkt des einem regelmäßigen Vieleck umgeschriebenen [eingeschriebenen] Kreises zu finden.

2. Das von einer Vielecksseite und zwei großen Radien gebildete Dreieck (AMB) heißt Bestimmungsdreieck des regelmäßigen Vielecks; sein Winkel an der Spitze (φ) heißt Zentriwinkel des regelmäßigen Vielecks.

3. Der Zentriwinkel des regelmäßigen n-ecks beträgt $\frac{360^\circ}{n}$ oder $\frac{4}{n}R$; der Winkel des n-ecks beträgt also $\left(180 - \frac{360}{n}\right)^\circ$ oder $\left(2 - \frac{4}{n}\right)R$.

4. Ist s die Seite, u der Umfang, F der Flächeninhalt eines regelmäßigen n-ecks, ϱ sein kleiner Radius, so ist

$$u = n \cdot s, \quad F = n \cdot \frac{s\varrho}{2} = \tfrac{1}{2} n s \varrho = \tfrac{1}{2} u \varrho.$$

4) Hilfssatz. Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

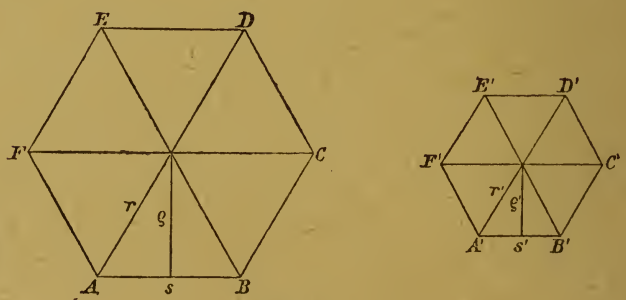


Fig. 171.

Bew. Da sich $AB : BC = 1 : 1$
und $A'B' : B'C' = 1 : 1$ verhält (Fig. 171),
so ergibt sich $AB : BC = A'B' : B'C'$ oder nach Vertauschung der Innenglieder $AB : A'B' = BC : B'C'$ u. s. f.

Die Gleichheit aller Winkel des Vielecks ergibt sich daraus, daß jeder $\left(2-\frac{4}{n}\right)$ R beträgt.

Zusatz. Die Bestimmungsdreiecke regelmäßiger Vielecke von gleicher Seitenzahl sind gleichfalls ähnlich.

5) Lehrsatz. Die Umfänge regelmäßiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich zueinander wie ihre großen oder kleinen Radien, ihre Inhalte wie die Quadrate derselben.

Bew. (Fig. 171.) Werden die Umfänge mit u und u', die Inhalte mit F und F' bezeichnet,
so folgt aus § 35, 14: $u:u' = s:s'$ und $F:F' = s^2:s'^2$.
Da aber (nach 4 Zus.) $s:s' = r:r' = \varrho:\varrho'$ ist, so ergibt sich
$u:u' = r:r' = \varrho:\varrho'$ und $F:F' = r^2:r'^2 = \varrho^2:\varrho'^2$.

Folgerung. Die Umfänge der einem Kreise um- und eingeschriebenen n-ecke verhalten sich zueinander wie der große Radius des zweiten zum kleinen Radius, ihre Inhalte verhalten sich zueinander wie die Quadrate dieser Radien.

6) Rechnungsergebnisse. Bezeichnet man mit u_n den Umfang, mit F_n den Inhalt des regelmäßigen n-ecks mit dem großen Radius r, so ergibt sich

$u_3 = 3r\sqrt{3}$, $F_3 = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$,

$u_4 = 4r\sqrt{2}$, $F_4 = 2r^2$,

$u_6 = 6r$, $F_6 = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$,

$u_8 = 8r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $F_8 = 2r^2\sqrt{2}$,

$u_{12} = 12r\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $F_{12} = 3r^2$.

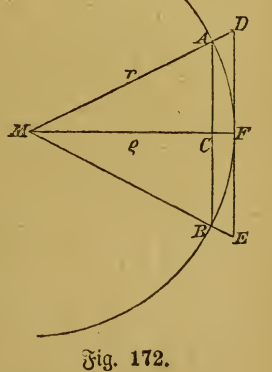


Fig. 172.

7) Ist AB (s_n) (Fig. 172) die Seite des dem Kreise mit dem Radius r eingeschriebenen n-ecks, MC (ϱ_n) sein kleiner Radius, DE (s'_n) die Seite des demselben Kreise umgeschriebenen regelmäßigen n-ecks, so ist $MC^2 = MA^2 - AC^2$ (§ 33, 3 Folg.)

$$\text{oder } \varrho_n^2 = r^2 - \frac{s_n^2}{4},\quad \varrho_n = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}.$$

Es verhält sich aber $DE:AB = MF:MC$ oder $s'_n:s_n = r:\varrho_n$; daher ist $s'_n = r\cdot\frac{s_n}{\varrho_n}$ und $u'_n = r\cdot\frac{u_n}{\varrho_n}$.

Ferner ist $AF = s_{2n}$ Kathete und $FC = r - \varrho_n$ ihre Projektion auf die Hypotenuse $FG = 2r$, die durch Verdoppelung von FM entsteht; also $s^2_{2n} = 2r\cdot(r-\varrho_n)$ und $u_{2n} = 2n\cdot\sqrt{2r\cdot(r-\varrho_n)}$.

Der zugehörige kleine Radius ϱ_{2n} ist das Lot MH von M auf AF; also folgt wie vorher für ϱ_n,

$$\varrho^2{}_{2n} = r^2 - \frac{1}{4} \cdot s^2{}_{2n} = \frac{r}{2} \cdot (r + \varrho_n).$$

Hiernach kann man aus r und s_n, z. B. $s_6 = r$ der Reihenfolge nach berechnen u_6, ϱ_6, u'_6; u_{12}, ϱ_{12}, u'_{12}; u_{24} usw.

§ 39. Von der Kreisteilung.

1) **Aufgabe.** Die Kreisperipherie in zehn gleiche Teile zu teilen.

Analysis. Soll der Bogen AB (Fig. 173) der zehnte Teil der Peripherie sein, so muß auch der zugehörige Zentriwinkel der zehnte Teil von 360° sein, also 36° betragen. Daraus folgt, daß in dem gleichschenkligen Dreieck AMB jeder Basiswinkel 72° betragen muß. Halbiert man nun einen derselben, z. B. $\angle ABM$ durch die Gerade BC, so ist $\angle CBM = 36°$, also das Dreieck MCB gleichschenklig (§ 15, 6), CM = CB. Weiter folgt, da $\angle ACB = 72°$, also auch das Dreieck ABC gleichschenklig ist, BA = BC.

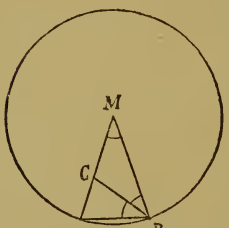


Fig. 173.

Nun ist aber $\triangle BAC \sim \triangle MAB$ (II); daraus folgt AM : AB = AB : AC oder, da AB = BC = CM ist,

AM : CM = CM : AC.

Die Sehne des Bogens, der den zehnten Teil der Kreisperipherie darstellt, muß also gleich dem größeren Abschnitt des stetig geteilten Radius sein.

Konstr. Man teile den Radius MA (Fig. 173) stetig (nach § 36, 13), sodaß

AM : CM = CM : AC ist,

und beschreibe mit CM um A einen Kreisbogen, der die Peripherie in B trifft.

Beh. Der Bogen AB ist der zehnte Teil der Kreisperipherie, d. h. wenn man noch B mit M verbindet, so ist $\angle AMB = 36°$.

Bew. Zieht man noch BC (Fig. 173), so ist nach der Konstruktion AM : CM = CM : AC
und auch AM : AB = AB : AC,
folglich $\triangle BAC \sim \triangle MAB$ (I; vgl. § 35, 5).
Daher ist $\angle ABC = \angle AMB$. Weil ferner das Dreieck AMB gleichschenklig ist, so ist auch das ihm ähnliche Dreieck ABC

gleichschenklig, es ist $AB = BC$. Folglich ist auch $CM = CB$, also auch $\angle CBM = \angle CMB$ oder (da $\angle ABC = \angle AMB$ ist) $\angle ABM = 2 \cdot \angle AMB$.

Da hiernach jeder Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks MAB doppelt so groß ist wie der Winkel an der Spitze, so muß dieser Winkel ($\angle AMB$) der fünfte Teil von 180°, also der zehnte Teil von 360° oder gleich 36° sein.

2) Mit der Zehnteilung der Kreisperipherie ist auch die Aufgabe gelöst: in einen Kreis ein **regelmäßiges Zehneck** zu zeichnen.

Zusätze. 1. Verbindet man je zwei nicht aufeinanderfolgende Ecken des regelmäßigen Zehnecks im Kreise, so erhält man ein demselben Kreise eingeschriebenes **regelmäßiges Fünfeck** (vgl. § 38, 2 Zus. 1), oder man hat die Kreisperipherie in fünf gleiche Teile geteilt.

2. Indem man die Bögen des eingeschriebenen Zehnecks halbiert, erhält man die Ecken des eingeschriebenen regelmäßigen 20-ecks (vgl. § 38, 2 Zus. 2); man kann also die Kreisperipherie durch Fortsetzung des Verfahrens in 20, 40, 80 ... gleiche Teile teilen.

3) **Rechnungsergebnisse.** Bezeichnet man mit s_{10} die Seite und mit F_{10} die Fläche des regelmäßigen Zehnecks im Kreise mit dem Radius r, mit s_5 und F_5 ebenso die Seite und Fläche des Fünfecks, so gelten folgende Formeln

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \qquad F_{10} = \frac{5\,r^2}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \qquad F_5 = \frac{5\,r^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

4) **Aufgabe.** Die Kreisperipherie in 15 gleiche Teile zu teilen.

Lösung. Man beschreibe (Fig. 174) um einen Punkt (A) der Peripherie mit dem Radius (d. h. der Sechseckseite, vgl. § 38, 2 Zus. 1) und mit der Zehneckseite (vgl. 1, Aufgabe) Kreisbögen, die die Peripherie in B und C schneiden mögen. Dann ist das Bogenstück BC der 15. Teil der Peripherie.

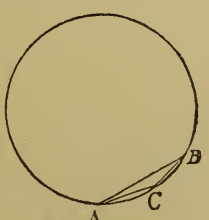


Fig. 174.

Der Beweis folgt daraus, daß

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15} \text{ ist.}$$

Zusatz. Hiernach kann man in den Kreis auch ein regelmäßiges 15-eck, 30-eck, 60-eck u. s. w. beschreiben.

5) Aus diesem Paragraphen folgt in Verbindung mit § 38, daß man die Kreisperipherie durch geometrische Konstruktion in 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 64, 80, 96 ... gleiche Teile teilen kann.

Die Kreisteilung in n gleiche Teile für diese Fälle, kürzer ausgedrückt für $n = 2^x$, $3 \cdot 2^x$, $5 \cdot 2^x$, $15 \cdot 2^x$ (wo x irgend eine der Zahlen 0, 1, 2, 3 ... bedeutet), war schon Euklid bekannt.

Aber erst nach zwei Jahrtausenden gelang es dem großen Mathematiker Gauß mit Hilfe algebraischer Betrachtungen in der Kreisteilung weiter zu kommen. Er zeigte, daß, wenn n eine Primzahl von der Form $2^{2^k} + 1$ ist (z. B. $17 = 2^4 + 1$, $257 = 2^8 + 1$), die Teilung des Kreises in n gleiche Teile allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal ausführbar (oder die Konstruktion der n-eck-Seite möglich) ist.

§ 40. Berechnung des Kreisumfangs und Kreisinhalts.

1) Jede Kreisperipherie kann als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich vielen (folglich unendlich kleinen) Seiten betrachtet werden.

Denn denkt man sich die Zentriwinkel irgend eines regelmäßigen n-ecks (§ 38, 3, Zus. 2) durch fortgesetztes Halbieren in 2, 4, 8 ... gleiche Teile geteilt, so bilden die erhaltenen Teilpunkte der Peripherie die Ecken eines regelmäßigen 2n-, 4n-, 8n-ecks u. s. w. (§ 38, 2). Je mehr Seiten das Vieleck hat, desto näher liegen sie der Kreisperipherie. Wenn verlangt wird, daß der größte Abstand zwischen einem Bogen und der zugehörigen Sehne kleiner bleiben soll als ein beliebig kleiner Teil des Radius, so läßt sich die erforderliche Seitenzahl des Vielecks angeben, bei dem dies der Fall ist. Wird dann die Seitenzahl unendlich groß, so muß dieser Abstand unendlich klein werden, d. h. das Vieleck mit dem Kreis zusammenfallen.

2) Die drei in § 38, 4 und 5 für die regelmäßigen Vielecke abgeleiteten Sätze gelten daher auch für den Kreis und lauten für ihn:

a) Kreise sind einander ähnlich.

b) Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien.

c) Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

3) Lehrsatz. Bei allen Kreisen ist das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser dieselbe Zahl.

Bew. (Fig. 175). Sind p und p′ die Peripherieen zweier Kreise mit den Radien r und r′, so folgt aus 2 b

$$\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'}, \text{ also auch } \frac{p}{p'} = \frac{2r}{2r'}, \text{ folglich nach § 48, 7 a}$$

$$\frac{p}{2r} = \frac{p'}{2r'}.$$

Diese Zahl, die den für alle Kreise gleichen Wert des Verhältnisses der Peripherie zum Durchmesser angibt, wird mit π bezeichnet:

$$\pi = \frac{p}{2r}.$$

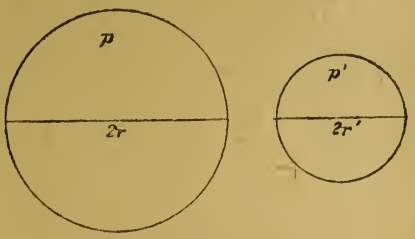


Fig. 175.

4) Ist der Radius des Kreises Längeneinheit (z. B. $r = 1$ cm), so wird $\pi = \frac{p}{2}$; es ergibt sich daher auch die folgende

Erklärung. π ist die Maßzahl des Halbkreises, dessen Radius Längeneinheit ist.

5) Die Berechnung der Zahl π gründet sich auf folgende Sätze:

a) Der Umfang des Kreises ist größer als der des eingeschriebenen und kleiner als der des umgeschriebenen n-ecks:

$$u_n < p < u'_n.$$

Bew. Die Sehne AB (Fig. 176) ist kleiner als der Bogen AB, also ist auch $n \cdot AB < p$ oder $u_n < p$. Dagegen ist (Fig. 177) FB + BG (oder AB) größer als der Bogen FG, also ist auch $n \cdot AB > p$ oder $p < u'_n$.

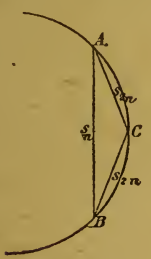


Fig. 176.

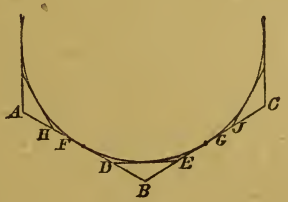


Fig. 177.

Folglich ist $u_n < p < u'_n$.

b) Der Umfang des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen 2n-ecks ist größer als der des eingeschriebenen regelmäßigen n-ecks.

Bew. Ist AB (s_n) (Fig. 176) die n-eck-Seite, AC oder BC (s_{2n}) die 2n-eck-Seite, so ist

$$s_{2n} + s_{2n} > s_n \text{ (§ 14, 3) oder } 2\,s_{2n} > s_n,$$

also auch $2n \cdot s_{2n} > n \cdot s_n$, d. h. $u_{2n} > u_n$.

c) Der Umfang des einem Kreise umgeschriebenen regelmäßigen 2n-ecks ist kleiner als der des umgeschriebenen regelmäßigen n-ecks.

Bew. Sind AB und BC (Fig. 177) zwei Seiten des n-ecks, HD, DE und EI drei Seiten des 2n-ecks, F und G Berührungspunkte, so ist offenbar FB + BG gleich einer Seite des n-ecks (s'_n) und FD + DE + EG gleich der Summe von zwei Seiten des 2n-ecks.

Es ist aber FB + BG > FD + DE + EG, also $s'_n > 2s'_{2n}$, folglich auch $n \cdot s'_n > 2n \cdot s'_{2n}$, d. h. $u'_n > u'_{2n}$.

Auf Grund dieser Sätze erhält man, wenn im Kreise mit dem Radius 1 cm die ganzen oder halben Umfänge der eingeschriebenen und umgeschriebenen n-ecke, 2n-ecke, 4n-ecke u. s. f. (z. B. der 6-ecke, 12-ecke, 24-ecke u. s. f.) berechnet werden, für die Zahl π Näherungswerte, d. h. Brüche, die einander immer näher kommen, je größer n wird.

Aus § 38, 7 geht hervor, daß für eine unendlich große Seitenzahl n diese beiden Näherungswerte u_n und u'_n zusammenfallen. Denn in der Gleichung

$$u'_n : u_n = r : \varrho_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s_n^2} = 1 : \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}$$

wird ja für ein unendlich großes n s_n verschwindend klein, und die Quadratwurzel nimmt den Wert 1 an. Dieser gemeinsame Grenzwert, dem u'_n und u_n mit wachsendem n sich unbegrenzt nähern, ist gleich $2\pi r$.

6) **Rechnungsergebnisse.** Wenn man für die Berechnung von π vom regelmäßigen Sechseck ausgeht, so erhält man die folgende Tabelle (S. 157).

Anmerkungen. 1. Die Zahl π heißt **Ludolphsche Zahl** nach Ludolph van Ceulen (d. h. von Cöln), † 1610 in Leyden, der sie bis auf 35 Dezimalstellen berechnet hat. Der erste, der den Wert von π mit Benutzung von regelmäßigen Vielecken annähernd genau ermittelte, war Archimedes, † 212 v. Chr. zu Syrakus; er fand (mit Hilfe des 96-ecks) $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ und setzte deshalb $\pi = 3\frac{1}{7}$ (= 3,14). Ein anderer, von Adriaen Anthonisz (1527—1607, oder seinem Sohne Metius) gefundener Näherungswert ist $\frac{355}{113} = 3{,}1415929$. Die Bezeichnung der Zahl durch den Buchstaben π rührt von Leonhard

Euler (1707—1783) her. Man kennt jetzt π auf mehrere hundert Stellen; bis auf 14 Stellen ist sein Wert $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$*)

2. Man hat bewiesen (Lindemann 1882), daß π eine transzendente Zahl ist (d. h. eine Zahl, die nicht Wurzel einer Gleichung von der Form $a + bx + cx^2 + \ldots + fx^n = 0$ sein kann). Damit ist dann auch erwiesen, daß es unmöglich ist, die Kreisperipherie durch Konstruktion oder Rechnung als Strecke darzustellen (**Rektifikation des Zirkels**), oder die Kreisfläche in ein Quadrat zu verwandeln (**Quadratur des Zirkels**).

Seitenzahl n	Halber Umfang des eingeschriebenen n-ecks	Halber Umfang des umgeschriebenen n-ecks
6	3	3,(46410)
12	3,1(0583)	3,(21539)
24	3,1(3263)	3,1(5966)
48	3,1(3935)	3,14(609)
96	3,141(03)	3,14(271)
192	3,141(45)	3,141(87)
384	3,1415(6)	3,141(66)
768	3,1415(8)	3,141(61)
1536	3,141592	3,14160

Der Wert von π auf fünf Dezimalen ist also $\underline{\pi = 3{,}14159}$ ($\log \pi = 0{,}49715 = 0{,}4971499$).

7) **Lehrsätze.** a) Man findet die Maßzahl jeder Kreisperipherie, indem man die Maßzahl des Durchmessers mit der Zahl π multipliziert:

$$\underline{p = 2\pi r}.$$

Dies folgt aus der in 3) angegebenen Definitionsgleichung $\pi = \frac{p}{2r}$.

b) Man findet den Inhalt jeder Kreisfläche, indem man das Quadrat des Radius mit der Zahl π multipliziert:

$$\underline{F = \pi r^2}.$$

Dies folgt aus § 38, 3) Zus. 4, wenn man den Kreis als regelmäßiges Vieleck mit dem Umfange p betrachtet.

*) Die Aufeinanderfolge der Ziffern ist leicht zu behalten mit Hilfe des folgenden französischen Merkverses:

Que j'aime à faire apprendre
Un nombre utile aux sages,
Illustre Archimède, artiste ingénieux!

(Jedes Wort gibt durch die Anzahl seiner Buchstaben eine Ziffer an.)

8) Die Fläche F eines **Kreisringes** erhält man, indem man von der Fläche des größeren Kreises mit dem Radius r die des kleineren mit dem Radius ϱ abzieht (Fig. 178):

$$F = \pi (r^2 - \varrho^2) = \pi (r + \varrho) (r - \varrho).$$

9) Da die Längen der Kreisbogen ihren Zentriwinkeln proportional sind (§ 23, 8), so ergibt sich für den zu dem Zentriwinkel γ gehörenden Bogen b (Fig. 179) die Proportion:

$$\frac{b}{p} = \frac{\gamma^0}{360^0}$$

$$\text{also} \quad b = \frac{\pi r \gamma}{180} = \frac{\gamma}{180} \pi r.$$

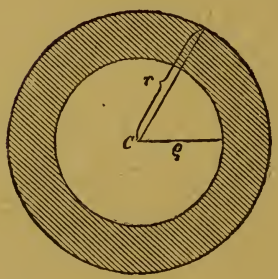


Fig. 178.

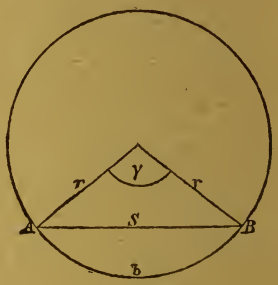


Fig. 179.

10) Da die Flächen der Kreisausschnitte oder Sektoren ihren Zentriwinkeln proportional sind (§ 23, 8), so ergibt sich für die zu dem Zentriwinkel γ gehörende **Sektorfläche** S die Proportion (F bezeichne die Kreisfläche):

$$\frac{S}{F} = \frac{\gamma^0}{360^0},$$

$$\text{also} \quad S = \frac{\pi r^2 \cdot \gamma}{360} = \frac{\gamma}{360} \pi r^2.$$

Oder es ist auch $\frac{S}{F} = \frac{b}{p}$,

$$S = \frac{bF}{p} = \frac{b \cdot \pi r^2}{2 \pi r}, \quad \text{also} \quad S = \frac{b}{2} \cdot r.$$

Der Flächeninhalt eines Kreissektors ist also gleich dem Produkt aus dem halben zugehörigen Bogen und dem Kreisradius.

II. Arithmetik (Algebra).

§ 41. Größen und Zahlen. Gleichungen.

1) Die Arithmetik ist die Lehre von den Zahlengrößen. Durch das Abzählen beliebiger Dinge gelangt man zu den **Zahlen**. Gibt man zugleich mit der Zahl an, was für (gleichartige) Größen gezählt oder gemessen worden sind, so erhält man die **benannte Zahl**. Gibt man über die Art und Beschaffenheit der gezählten Dinge nichts an, so erhält man die **unbenannte Zahl**.

2) **Natürliche Zahlen** heißen die durch Abzählen entstandenen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 .... Diese Zahlen bilden die **natürliche Zahlenreihe**; dieselbe ist **unbegrenzt**.

Erst durch ein zusammengesetzteres Verfahren als das bloße Zählen sind die **Brüche** oder **gebrochenen Zahlen** entstanden (vgl. § 3, 1), von denen die Dezimalbrüche (vgl. § 4, 2) nur eine besondere Art sind.

In der Folge wird der Zahlbegriff noch mehrfache Erweiterungen erfahren, so durch die Definition positiver und negativer (§ 44, 1), die Einführung irrationaler Zahlen (§ 48, 3) u. s. w.

3) Zur kurzen Bezeichnung von Größen und Zahlen bedient man sich des Hilfsmittels, dieselben durch **Buchstaben** (a, b, c . . . n, o, p . . . x, y, z) auszudrücken. Die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen drückt man durch die **Rechenzeichen** $+$, $-$, $\cdot$, $:$ aus.

4) Jeder Buchstabe soll im folgenden so lange eine allgemeine Größe bedeuten, als nicht seine Bedeutung ausdrücklich auf einen engeren Begriff, wie den der unbenannten Zahl, der natürlichen Zahl u. s. w. eingeschränkt wird.

5) Jede Verbindung mehrerer Größen oder Zahlen durch Rechenzeichen heißt **Ausdruck**.

So sind $a \cdot b + c$, $a \cdot (b + c)$, $a - b : c$, $(a - b) : c$ oder $\frac{a - b}{c}$ Ausdrücke.

Soll mit einem Ausdrucke gerechnet werden, so wird es oft nötig, um einen Doppelsinn zu vermeiden, den Ausdruck in Klammern einzuschließen.

6) **Gleichung** heißt die Verbindung zweier Größen oder Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen. Der Ausdruck links vom Gleichheits-

zeichen heißt die **linke Seite**, der Ausdruck rechts die **rechte Seite** der Gleichung.

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ ist ebensowohl eine Gleichung wie $\frac{a\,x}{b} = x + 1$.

7) **Formel** heißt eine Gleichung, die für alle Werte der in ihr vorkommenden Größen oder Zahlen richtig bleibt. Eine Formel wird daher auch **identische Gleichung** genannt. Durch eine Formel wird also ein Rechengesetz oder ein arithmetischer Lehrsatz dargestellt.

Beispiele: Die sämtlichen Lehrsätze der §§ 42—51.

8) Die **Umkehrung** eines arithmetischen Lehrsatzes wird erhalten, indem man in der ihn ausdrückenden Formel die linke und rechte Seite miteinander vertauscht.

Anmerkungen. 1. Da $a = b$ identisch ist mit $b = a$, so ist mit jedem arithmetischen Lehrsatze seine Umkehrung bewiesen (bei geometrischen Lehrsätzen hat die Umkehrung eine ganz andere Bedeutung — s. § 12, 6 — und ist keineswegs selbstverständlich).

2. In besonderen Fällen liefert die Umkehrung eines arithmetischen Lehrsatzes wieder denselben Lehrsatz: so folgt aus $n \cdot p = p \cdot n$ (§ 45, 2) nur $p \cdot n = n \cdot p$, also ganz dasselbe.

9) Jede nicht identische Gleichung enthält eine Aufgabe, nämlich für eine oder mehrere der in ihr enthaltenen Buchstabengrößen einen oder mehrere Werte zu ermitteln, die, für sie eingesetzt, die Gleichung zu einer identischen machen.

Hat man z. B. die Gleichung $\frac{57\,m - 5a}{7} = a + 3\,m$, wo m Meter bedeutet, so genügt nur der Wert 3 m, für a eingesetzt, der Gleichung (er ergibt die identische Gleichung $6\,m = 6\,m$). Durch den Wert $a = 3\,m$ ist also die Gleichung **gelöst**.

Näheres über solche Gleichungen und ihre Lösung in § 52.

§ 42. Addition.

1) **Erklärung.** Größen **addieren** heißt eine neue Größe bilden, deren Teile die gegebenen Größen sind.

Die zu addierenden Größen heißen Summanden (Glieder, Posten). Durch Addition entsteht eine Summe.

2) **Lehrsatz I.** $a + b + c = b + c + a = c + a + b \ldots$

Die Reihenfolge der Summanden in einer Summe ist gleichgültig. (Dies folgt aus § 6, 2.)

3) **Lehrsatz II.** $a + (b + c) = a + b + c$.

Statt eine Summe zu addieren, darf man die Summanden nacheinander addieren. (Dies folgt aus § 6, 2.)

Umkehrung. Statt mehrere Größen nacheinander zu addieren, darf man ihre Summe addieren.

Folgerung. In einem Ausdrucke, der nur aus Summanden besteht, darf man beliebig Klammern setzen oder fortlassen.

4) Kommen in einer Summe gleiche Glieder vor, so kann man sich einer abgekürzten Schreibweise bedienen.

$$a + a + a + a + b + b + b = 4a + 3b.$$

Die vor den Buchstaben (a und b) stehenden Zahlen nennt man **Koeffizienten** (4 ist der Koeffizient von a, 3 der Koeffizient von b).

§ 43. Subtraktion.

1) **Erklärung.** Von einer Größe a eine Größe b **subtrahieren** heißt den Summanden suchen, zu dem man b addieren muß, um a als Summe zu erhalten.

Definitionsgleichung. $(a - b) + b = a$.

Die Größe a, von der subtrahiert werden soll, heißt **Minuendus**; die Größe b, die subtrahiert werden soll, heißt **Subtrahendus**. Durch Subtraktion entsteht eine **Differenz**.

Die Differenz $(a - b)$ ist demnach diejenige Größe, zu der man den Subtrahendus addieren muß, um den Minuendus zu erhalten.

2) **Rechenregel.** Addition und Subtraktion derselben Größe heben einander auf.

3) **Lehrsatz I.** $a - (b + c) = a - b - c$.

Statt eine Summe zu subtrahieren, darf man ihre Summanden nacheinander subtrahieren.

Bew. Die Differenz $a - (b + c)$ ist diejenige Größe, zu der man $(b + c)$ addieren muß, um a zu erhalten. Soll daher der rechts stehende Ausdruck gleich dieser Differenz sein, so muß, wenn man zu ihm $(b + c)$ addiert, a herauskommen. Dies ist der Fall, denn

$$\begin{aligned} a - b - c + (b + c) &= a - b - c + b + c \quad (\S\ 42,\ \text{Lehrs. II}) \\ &= a - b - c + c + b \quad (\S\ 42,\ \text{Lehrs. I}) \\ &= a - b + b = a \quad (\text{Definitionsgleichung}). \end{aligned}$$

Umkehrung. Statt mehrere Größen nacheinander zu subtrahieren, darf man ihre Summe subtrahieren.

Zusatz. $a - b - c = a - c - b$.

Wenn mehrere Subtraktionen nacheinander vorgenommen werden sollen, so ist die Reihenfolge gleichgültig.

4) Lehrsatz II. $a + (b - c) = a + b - c$.

Statt eine Differenz zu addieren, darf man den Minuendus addieren und den Subtrahendus subtrahieren.

Bew. Die rechte Seite $(a + b - c)$ ist diejenige Größe, zu der man c addieren muß, um $(a + b)$ zu erhalten. Soll daher die linke Seite gleich der rechten sein, so muß auch, wenn man zur linken Seite c addiert, $(a + b)$ herauskommen. Dies ist der Fall, denn

$$a + (b - c) + c = (b - c) + c + a \quad (\S\ 42, \text{Lehrs. I}),$$
$$= b + a \quad (\text{Definitionsgleichung})$$
$$= a + b \quad (\S\ 42, \text{Lehrs. I}).$$

Umkehrung. Statt nacheinander eine Größe zu addieren und eine kleinere zu subtrahieren, darf man ihre Differenz addieren.

5) Aus $a + (b - c) = a + b - c$ (Lehrs. II) ergibt sich ferner

$(b - c) + a = b + a - c$ (§ 42, Lehrs. I)

oder $b - c + a = b + a - c$.

Man erhält daher (indem man noch die Buchstaben a und b und beide Seiten der Gleichung vertauscht) zum Lehrs. II den folgenden

Zusatz. $a + b - c = a - c + b$.

Wenn nacheinander eine Addition und eine Subtraktion vorgenommen werden sollen, so ist die Reihenfolge gleichgültig.

Das kann auch bewiesen werden, indem man zeigt, daß c zur rechten Seite addiert, $(a + b)$ als Summe ergibt.

6) Lehrsatz III. $a - (b - c) = a - b + c$.

Statt eine Differenz zu subtrahieren, darf man in beliebiger Reihenfolge den Minuendus subtrahieren und den Subtrahendus addieren.

Bew. Die linke Seite $a - (b - c)$ ist diejenige Größe, zu der man $(b - c)$ addieren muß, um a zu erhalten. Soll daher die rechte Seite gleich der linken sein, so muß, wenn man zu ihr $(b - c)$ addiert, a herauskommen. Dies ist der Fall, denn

$$a - b + c + (b - c) = a - b + c + b - c \quad (\text{Lehrs. II})$$
$$= a - b + b + c - c \quad (\S\ 42, \text{Lehrs. I})$$
$$= a \quad (\text{zweimalige Anwendung der Definitionsgleichung}).$$

Umkehrung. Statt nacheinander eine Größe zu subtrahieren und eine kleinere zu addieren, darf man ihre Differenz subtrahieren.

7) **Erklärung. Algebraische Summe** heißt ein Ausdruck, der aus Summanden und Subtrahenden zusammengesetzt ist.

Die Reihenfolge der Glieder einer algebraischen Summe ist gleichgültig. (Dies folgt aus § 42, I, § 43, I, Zus. und § 43, 5.)

Anmerkung. Einen Ausdruck von der Form $a + b - c - d + e - f \cdots$ bezeichnet man als **Polynom.** (Dementsprechend ist ein **Binom** ein Ausdruck von zwei Gliedern: $a + b$, $c - d$, ein **Monom** ein solcher von einem Gliede: c, x, ein **Trinom** ein solcher von drei Gliedern: $e + f - g$.)

8) **Lehrsatz IV.** $a + (b - c + d - e + f) = a + b - c + d - e + f$.

Statt eine algebraische Summe zu addieren, darf man in beliebiger Reihenfolge die Summanden addieren und die Subtrahenden subtrahieren.

Bew. $a + (b - c + d - e + f)$
$= a + (b + d + f - c - e)$ (7)
$= a + ((b + d + f) - (c + e))$ (Lehrs. I, Umkehr.)
$= a + (b + d + f) - (c + e)$ (Lehrs. II)
$= a + b + d + f - c - e$ (§ 42, Lehrs. II, u. § 43, Lehrs. I)
$= a + b - c + d - e + f$ (7).

9) **Lehrsatz V.** $a - (b - c + d - e + f) = a - b + c - d + e - f$.

Statt eine algebraische Summe zu subtrahieren, darf man in beliebiger Reihenfolge die Summanden subtrahieren und die Subtrahenden addieren.

Bew. $a - (b - c + d - e + f)$
$= a - (b + d + f - c - e)$ (7)
$= a - ((b + d + f) - (c + e))$ (Lehrs. I, Umkehr.)
$= a - (b + d + f) + (c + e)$ (Lehrs. III)
$= a - b - d - f + c + e$ (§ 43, Lehrs. I, u. § 42, Lehrs. II)
$= a - b + c - d + e - f$ (7).

10) **Rechenregeln.** Eine Klammer, vor der ein Pluszeichen steht, wird **aufgelöst**, indem man die Klammer ohne weiteres fortläßt.

Eine Klammer, vor der ein Minuszeichen steht, wird aufgelöst, indem man alle Vorzeichen in der Klammer umkehrt und dann die Klammer mit dem davorstehenden Minuszeichen fortläßt.

§ 44. Von der Null und den algebraischen Größen.

1) **Erklärungen.** Null (0) bedeutet eine Differenz, deren Minuendus gleich dem Subtrahendus ist.

$$a - a = 0.$$

Aus den Sätzen des § 43 folgt sofort:

$$a + 0 = 0 + a = a$$
$$a - 0 = a.$$

Positive Größe (+ a) heißt eine Größe mit der Angabe, daß sie addiert werden soll. **Negative Größe** (− a) heißt eine Größe mit der Angabe, daß sie subtrahiert werden soll.

Die Zeichen „+" und „−" vor der Größe a nennt man **positives und negatives Vorzeichen.** Von den Rechenzeichen (§ 41, 3) sind sie wohl zu unterscheiden; jedes der Vorzeichen heißt dem anderen **entgegengesetzt** oder das **umgekehrte** des anderen. Die positiven und negativen Größen nennt man mit gemeinsamem Namen **algebraische Größen.** Sieht man bei einer Größe vom Vorzeichen ab, so erhält man den **absoluten Wert** (absoluten Betrag) dieser Größe. Größen mit demselben Vorzeichen heißen **gleichstimmig**, Größen mit entgegengesetzten Vorzeichen heißen **ungleichstimmig.** —

Durch die Einführung der algebraischen Größen wird es möglich, das Resultat einer Subtraktion auch dann anzugeben, wenn der Subtrahendus größer als der Minuendus ist. Man erhält ferner mit Rücksicht auf die Umkehrungen § 43, II und III:

$$+ b - c = + (b - c), \text{ wenn } c < b,$$
$$+ b - c = - (c - b), \text{ wenn } c > b \text{ ist.}$$

Die erste von diesen Gleichungen kann aber ohne Beschränkung angewendet werden, wenn man der rechten Seite derselben auch für den Fall $c > b$ eine Bedeutung beilegt. Dies geschieht vermöge der folgenden Festsetzungen.

2) **Erklärung.** Eine positive Größe addieren bedeutet ihren absoluten Wert addieren. Eine negative Größe addieren bedeutet ihren absoluten Wert subtrahieren.

Dieser Erklärung zufolge können Addition und Subtraktion zu einer einzigen Operation, der algebraischen Addition, zusammengefaßt werden. Eine algebraische Summe kann demnach als eine Summe von algebraischen Größen angesehen werden.

Anwendung der algebraischen Größen in der Geometrie. Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden (Fig. 180) von einem festen

Punkte 0 (dem Anfangspunkte) aus hin und her, so kann man, um seinen Abstand von 0 zu einer bestimmten Zeit durch eine einzige Größe auszudrücken, die in der einen Richtung zurückgelegten Strecken als positiv, die in der entgegengesetzten Richtung zurückgelegten Strecken als negativ ansehen. Welche Richtung man als positiv betrachten will, ist dabei willkürlich. Man pflegt bei einer wagerechten Geraden die Richtung von links nach rechts (Fig. 180), bei einer senkrechten Geraden die von unten nach oben als positiv anzunehmen.

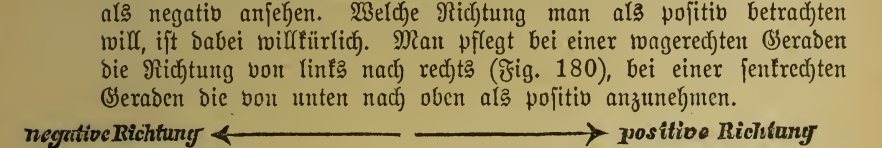


Fig. 180.

Ist der Punkt von 0 aus z. B. 17 cm nach rechts, dann 13 cm nach links gegangen, so ergibt sich für seine Entfernung von 0 der Ausdruck $+ 17\text{ cm} - 13\text{ cm} = + 4\text{ cm}$, d. h. er befindet sich in A, 4 cm rechts von 0.

Ist dagegen der Punkt von 0 aus 17 cm nach rechts, dann 20 cm nach links gegangen, so ergibt sich für seine Entfernung von 0 der Ausdruck $+17\text{ cm} - 20\text{ cm} = - 3\text{ cm}$, d. h. er befindet sich in B, 3 cm links von 0.

3) **Lehrsätze.** a) Eine positive Größe wird subtrahiert, indem man ihren absoluten Wert subtrahiert.

b) Eine negative Größe wird subtrahiert, indem man ihren absoluten Wert addiert.

$$a - (+ b) = a - b, \qquad a - (- b) = a + b.$$

(Man beweist, daß der Subtrahendus, zur rechten Seite addiert, den Minuendus ergibt.)

4) **Zeichenregeln.** a) Gleichstimmige Größen werden zueinander addiert, indem man ihre absoluten Werte addiert und der erhaltenen Summe das gemeinsame Vorzeichen gibt.

$$(+ a) + (+ b) = + (a + b), \quad (- a) + (- b) = - (a + b).$$

b) Ungleichstimmige Größen werden zueinander addiert, indem man ihre absoluten Werte subtrahiert und der Differenz das Vorzeichen der größeren gibt.

$$(+ a) + (- b) = + (a - b), \text{ wenn } a > b,$$
$$= - (b - a), \text{ wenn } a < b \text{ ist.}$$

5) **Alle Sätze über Addition und Subtraktion gelten auch für algebraische Größen.***)

*) Dieser und die späteren gesperrt gedruckten Sätze enthalten Erweiterungen, die mit Hilfe der vorausgeschickten Erklärungen zu beweisen sind.

§ 45. Multiplikation.

1) **Erklärung.** Eine Größe a mit einer Zahl n multiplizieren heißt eine Summe von n Summanden bilden, deren jeder gleich a ist. Die Größe a, die multipliziert werden soll, heißt **Multiplikandus**. Die Zahl n, mit der multipliziert werden soll, heißt **Multiplikator**. Die durch Multiplikation entstandene Größe heißt **Produkt**. Das Produkt $a \cdot n$ (oder an) bedeutet daher

$$a + a + a + \cdots + a \quad (n \text{ Summanden } a).$$

Der Multiplikator n kann hiernach nur eine natürliche Zahl sein (§ 41, 2).

Ein Produkt, in dem auch der Multiplikandus eine Zahl ist, heißt **Zahlenprodukt**.

2) **Lehrsatz I.** $p \cdot q = q \cdot p$.

In einem Zahlenprodukt darf man den Multiplikandus und den Multiplikator miteinander vertauschen.

Bew. Es sei $p = 4$, $q = 3$; dann ist die Summe

$$\begin{array}{r} 1 + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

je nach der Art des Summierens entweder

$$\left.\begin{array}{r} 4 \\ + 4 \\ + 4 \end{array}\right\} = 4 \cdot 3$$

oder $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 4$,

in beiden Fällen aber gleich 12. Dieselbe Betrachtung ist für alle Zahlenprodukte möglich.

Wegen der Vertauschbarkeit von Multiplikandus und Multiplikator in einem Zahlenprodukt hat man beiden auch den gemeinsamen Namen **Faktoren** gegeben.

3) **Lehrsatz II.** $a \cdot (p \cdot q) = a \cdot p \cdot q = a \cdot q \cdot p$.

Statt mit einem Zahlenprodukt zu multiplizieren, darf man mit den Faktoren nacheinander (in beliebiger Reihenfolge) multiplizieren.

Bew. Es sei $a = 5\,m$, $p = 4$, $q = 3$; dann ist die Summe

$$\begin{array}{r} 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m \\ + 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m \\ + 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m \end{array}$$

je nach der Art des Summierens entweder

$$5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m + 5\,m = 5\,m \cdot 12$$

$$\text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} 20\,\text{m} \\ +\,20\,\text{m} \\ +\,20\,\text{m} \end{array}\right\} = 20\,\text{m} \cdot 3$$

oder $15\,\text{m} + 15\,\text{m} + 15\,\text{m} + 15\,\text{m} = 15\,\text{m} \cdot 4$,
in jedem Falle aber gleich 60 m.

Ähnliche Betrachtungen sind aber für beliebige Werte von a, p und q und auch für noch mehr als zwei Faktoren möglich.

Umkehrung. Statt mit mehreren Zahlen nacheinander zu multiplizieren, darf man mit ihrem Produkt multiplizieren.

Folgerung. Wenn nacheinander mehrere Multiplikationen vorgenommen werden sollen, so ist ihre Reihenfolge gleichgültig.

4) **Lehrsatz III.** a) $(a + b - c) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n - c \cdot n$.

Statt eine algebraische Summe zu multiplizieren, darf man die Glieder einzeln multiplizieren und die erhaltenen Teilprodukte je nach ihrem Vorzeichen addieren oder subtrahieren.

Bew. Ist $n = 3$, so ist:

$$\begin{aligned} (a+b-c)\cdot 3 &= (a+b-c) + (a+b-c) + (a+b-c) \\ &= a+b-c \;+\; a+b-c \;+\; a+b-c \quad (\S\,43,8) \\ &= a+a+a \;+\; b+b+b \;-\; c-c-c \quad (\S\,43,7) \\ &= a\cdot 3 \;\;+\; b\cdot 3 \;\;-\; c\cdot 3. \end{aligned}$$

Genau ebenso wird der Satz für jeden anderen Wert von n bewiesen.

b) $a \cdot (n - p + q) = a \cdot n - a \cdot p + a \cdot q$.

Statt mit einer algebraischen Summe zu multiplizieren, darf man mit ihren Gliedern einzeln multiplizieren und die erhaltenen Teilprodukte je nach ihrem Vorzeichen addieren oder subtrahieren.

Bew. Ist $n = 6$, $p = 4$, $q = 3$, so ist die linke Seite der Gleichung

$$a \cdot (6 - 4 + 3) = a \cdot 5.$$

Die rechte Seite ist

$$\begin{aligned} a\cdot 6 - a\cdot 4 + a\cdot 3 &= a+a+a+a+a+a-a-a-a-a \\ &\qquad +a+a+a \\ &= a+a+a+a+a = a\cdot 5. \end{aligned}$$

Also sind beide Seiten gleich, da beide $a \cdot 5$ ergeben.

Genau ebenso wird der Satz für beliebige andere Werte von n, p, q und auch für mehr als drei solcher Glieder des Multiplikators bewiesen.

Umkehrung. Statt Produkte mit einem gemeinsamen Faktor zu addieren oder zu subtrahieren, darf man die algebraische Summe der nicht gemeinsamen Faktoren mit dem gemeinsamen Faktor multiplizieren.

5) Ein Produkt, dessen einer Faktor Null ist, ist gleich Null.

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Umgekehrt: Ist ein Produkt gleich Null, so muß mindestens ein Faktor Null sein. Ist $a \cdot b = 0$, so ist entweder $a = 0$, oder $b = 0$, oder beide sind Null.

Die Beschränkung, daß der Multiplikator nur eine absolute Zahl sein kann, wird aufgehoben durch die Einführung des **algebraischen Multiplikators.**

Man hat zwar zu unterscheiden

$$an - ap = a(n - p), \text{ wenn } n > p, \text{ und}$$
$$an - ap = -a(p - n), \text{ wenn } n < p \text{ ist.}$$

Die erste dieser Gleichungen wird aber unbeschränkt anwendbar, wenn man dem Multiplikator $(n - p)$ für den Fall $n < p$ eine solche Bedeutung beilegt, daß das Produkt $a(n - p)$ mit $-a(p - n)$ übereinstimmt.

6) **Erklärung.** Mit einer positiven oder negativen Zahl multiplizieren bedeutet mit der absoluten Zahl multiplizieren und das Produkt addieren oder subtrahieren.

7) Es wird daher:

$$(+a)(+n) = +(+an) = +an$$
$$(+a)(-n) = -(+an) = -an$$
$$(-a)(+n) = +(-an) = -an$$
$$(-a)(-n) = -(-an) = +an.$$

Vorzeichenregel. Das Produkt von zwei gleichstimmigen Faktoren ist positiv; das Produkt von zwei ungleichstimmigen Faktoren ist negativ.

8) Die Multiplikationssätze gelten auch für algebraische Multiplikatoren.

9) **Folgerung.** Statt zwei algebraische Summen miteinander zu multiplizieren, darf man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der anderen unter Beachtung der Vorzeichenregel multiplizieren.

$$(a - b) \cdot (c - d) = a \cdot c - b \cdot c - a \cdot d + b \cdot d.$$

10) Zur Abkürzung schreibt man statt $a \cdot a$, $a \cdot a \cdot a$, $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots$ auch a^2, a^3, $a^4 \cdots$ Man nennt diese Ausdrücke die zweite, dritte, vierte $\cdots$ **Potenz** von a und spricht sie „a hoch 2" (oder auch „a Quadrat", „a zur zweiten"), „a hoch 3" („a zur dritten") „a hoch 4" („a zur vierten") $\cdots$ (§ 1).

11) **Gleichnamig** heißen solche Glieder algebraischer Summen, die dieselben Buchstabengrößen in denselben Potenzen enthalten.

So sind in $a^3+3a^2b-6ab+5a^2b-3ab^2+10ab-7ab^2-4b^3$ das zweite und vierte, das dritte und sechste, das fünfte und siebente Glied gleichnamig.

Gleichnamige Glieder können vereinigt werden.

So wird die obige achtgliedrige algebraische Summe durch Vereinigung der gleichnamigen Glieder zu der folgenden fünfgliedrigen vereinfacht:

$$a^3+8a^2b+4ab-10ab^2-4b^3.$$

12) Durch Anwendung von IIIa und b oder von 9) werden algebraische Summen multipliziert.

1. Beispiel. $(7-4a+3a^2)\cdot 5a=35a-20a^2+15a^3$;

2. Beispiel. $3ab\cdot(6a+9b-2a^2)=18a^2b+27ab^2-6a^3b$;

3. Beispiel. $(2+3x-4x^2)(11-5x)=22+33x-44x^2$
$$-10x-15x^2+20x^3$$
$$=22+23x-59x^2+20x^3.$$

13) Durch Anwendung der Umkehrung von III wird eine algebraische Summe (deren Glieder einen gemeinsamen Faktor enthalten) in Faktoren zerlegt oder als Produkt dargestellt.

Beispiel. $18a^2b+27ab^2-6a^3b=3ab\,(6a+9b-2a^2)$
oder auch $=(6a+9b-2a^2)\cdot 3ab.$

Der gemeinsame Faktor $3ab$ ist aus der Klammer (und zwar vor oder hinter die Klammer) genommen.

14) Durch Gruppenbildung gelingt oft die Zerlegung auch solcher algebraischer Summen, deren Glieder keinen gemeinsamen Faktor haben.

1. Beispiel. $\underbrace{15a+6b}_{1.\text{ Gruppe}}\underbrace{-35ax-14bx}_{2.\text{ Gruppe}}=3\,(5a+2b)-7x\,(5a+2b)$
$$=(5a+2b)\,(3-7x).$$

2. Beispiel. $24+2n-15n^2=\underbrace{24-18n}_{1.\text{ Gruppe}}+\underbrace{20n-15n^2}_{2.\text{ Gruppe}}$
$$=6\,(4-3n)+5n\,(4-3n)$$
$$=(6+5n)\,(4-3n).$$

§ 46. Formeln.

Durch Ausführung der Multiplikation erhält man folgende Formeln:

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ [aber $(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$],

d. h. das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate beider Zahlen, vermehrt um das doppelte Produkt der beiden Zahlen.

2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

d. h. das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate beider Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt der beiden Zahlen.

3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,

d. h. das Produkt aus der Summe und Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate beider Zahlen, und umgekehrt:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

d. h. die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist gleich dem Produkt aus der Summe und Differenz beider Zahlen.

4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,

6) $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$.

Die Umkehrung der Formeln 1), 2) und 3) ist besonders häufig anwendbar zur Zerlegung algebraischer Summen in Faktoren.

Beispiele. 1. $25 + 20x + 4x^2 = (5 + 2x)^2$

2. $16n^2p^2 - 24np + 9 = (4np - 3)^2$

3. $100 - 49n^2 = (10 - 7n)(10 + 7n)$.

Anmerkung. Die Formel 3 erleichtert die Berechnung von Quadraten und anderen Ausdrücken.

Aus $a^2 = (a - b) \cdot (a + b) + b^2$ folgt z. B.:

$99^2 = 98 \cdot 100 + 1 = 9801$ für $a = 99$, $b = 1$

$98^2 = 96 \cdot 100 + 2^2 = 9604$ „ 98 2

$103^2 = 100 \cdot 106 + 3^2 = 10609$ „ 103 3

$45^2 = 40 \cdot 50 + 5^2 = 2025$ „ 45 5

$24^2 = 20 \cdot 28 + 4^2 = 576$ „ 24 4

$32^2 = 30 \cdot 34 + 2^2 = 1024 = 2^{10}$

$1024^2 = 1000 \cdot 1048 + 24^2 = 1048576 = 2^{20}$

Ferner: $29 \cdot 31 = 30^2 - 1 = 899$

$38 \cdot 42 = 40^2 - 2^2 = 1596$

$55 \cdot 65 = 60^2 - 5^2 = 3575$ u. s. w.

§ 47. Division.

1) **Erklärungen.** a) Eine Größe a durch eine Zahl b dividieren heißt eine dritte Größe suchen, die mit der Zahl b multipliziert das Produkt a ergibt (**1. Art der Division: das Teilen**).

1. Definitionsgleichung. $\frac{a}{b} \cdot b = a$.

b) Eine Größe a durch eine gleichartige Größe b dividieren heißt eine Zahl suchen, mit der man die Größe b multiplizieren muß, um das Produkt a zu erhalten. (2. Art der Division: das Messen.)

2. Definitionsgleichung. $b \cdot \frac{a}{b} = a$.

a heißt Dividendus, b Divisor, $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ Quotient.

Folgerungen. Wenn man einen Quotienten mit seinem Divisor multipliziert, so erhält man als Produkt den Dividendus.

Multiplikation und Division mit derselben Zahl heben einander auf.

Anmerkung. Für die Null ergibt sich

$$\frac{0}{a} = 0;$$

$$\frac{a}{0} = \infty \text{ (unendlich groß);}$$

$$\frac{a}{\infty} = 0;$$

$\frac{0}{0}$ ist gleich jeder beliebigen Zahl,

denn jede beliebige Zahl mit 0 muliplizіert gibt 0.

Anmerkung. Darum darf man nicht durch 0 dividieren. Wollte man z. B. die Gleichung $5x = 3x$ durch x dividieren, so würde man $5 = 3$ erhalten, während die Lösung lautet

$$5x - 3x = 2x = 0.$$
$$x = 0.$$

2) Sind der Dividendus und der Divisor Zahlen, so wird der Quotient $\frac{a}{b}$ Bruch genannt.

Der Bruch $\frac{a}{b}$ bedeutet soviel wie $\frac{1}{b} \cdot a$, d. h. den b^{ten} Teil der Einheit a mal genommen. Denn es ist $\left(\frac{1}{b} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{b} \cdot b \cdot a = 1 \cdot a = a$.

Auch die Brüche können als Größen betrachtet werden.

3) Lehrsatz I. $\frac{a + b - c}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n}$.

Statt eine algebraische Summe zu dividieren, darf man die Glieder einzeln dividieren und die erhaltenen Quotienten je nach ihrem Vorzeichen addieren oder subtrahieren.

Bew. Der Quotient $\frac{a+b-c}{n}$ gibt, mit dem Divisor n multipliziert, den Dividendus (a + b − c). Soll daher der rechts stehende Ausdruck gleich diesem Quotienten sein, so muß er mit n multipliziert (a + b − c) ergeben. Dies ist der Fall, denn

$$\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}\right)\cdot n=\frac{a}{n}\cdot n+\frac{b}{n}\cdot n-\frac{c}{n}\cdot n \text{ (§ 45, Lehrs. III)}$$
$$=a+b-c \text{ (Definitionsgleichung).}$$

Umkehrung. Statt Quotienten mit gleichem Divisor zu addieren oder zu subtrahieren, darf man die algebraische Summe der Dividenden durch denselben Divisor dividieren.

4) **Lehrsatz II.** $\frac{a\cdot b}{c}=\frac{a}{c}\cdot b.$

Statt ein Produkt zu dividieren, darf man den einen Faktor dividieren und den erhaltenen Quotienten mit dem anderen Faktor multiplizieren.

Bew. Der Quotient $\frac{a\cdot b}{c}$ gibt, mit dem Divisor c multipliziert, den Dividendus a · b. Soll daher die rechte Seite gleich der linken sein, so muß auch sie mit c multipliziert a · b ergeben. Dies ist der Fall, denn

$$\frac{a}{c}\cdot b\cdot c=\frac{a}{c}\cdot c\cdot b \text{ (§ 45, 3, Folg.)}$$
$$=a\cdot b \text{ (Definitionsgleichung).}$$

Umkehrung. Statt einen Quotienten zu multiplizieren, darf man den Dividendus multiplizieren und das erhaltene Produkt durch den Divisor dividieren.

5) Wenn $\frac{a}{c}$ ein Bruch ist, so wird auf das Produkt $\frac{a}{c}\cdot b$ das Gesetz von der Vertauschbarkeit der Faktoren (§ 45, 2) erst dadurch anwendbar, daß man die folgende Festsetzung über die Bedeutung des gebrochenen Multiplikators macht.

Erklärung. $b\cdot\frac{a}{c}=\frac{b\cdot a}{c}.$

Mit einem Quotienten multiplizieren bedeutet mit dem Dividendus multiplizieren und durch den Divisor dividieren.

6) **Lehrsatz III.** $\frac{a}{b\cdot c}=\frac{a}{b}:c=\frac{a}{c}:b.$

Statt durch ein Produkt zu dividieren, darf man durch die Faktoren nacheinander dividieren.

Bew. Der Quotient $\frac{a}{b \cdot c}$ gibt, mit dem Divisor $b \cdot c$ multipliziert, den Dividendus a. Also muß die rechte Seite, wenn sie gleich der linken sein soll, dieselbe Eigenschaft haben. Dies ist der Fall, denn

$$\left(\frac{a}{b} : c\right) \cdot b\,c = \left(\frac{a}{b} : c\right) \cdot c \cdot b \text{ (§ 45, Lehrs. II)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot b \text{ (Defin.)} = a \text{ (Defin.)}.$$

Umkehrung. Statt durch mehrere Zahlen nacheinander zu dividieren, darf man durch ihr Produkt dividieren.

Zusatz: Wenn mehrere Divisionen nacheinander vorgenommen werden sollen, so ist die Reihenfolge gleichgültig.

7) **Lehrsatz IV.** $\quad a : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}.$

Statt durch einen Quotienten zu dividieren, darf man mit dem Divisor multiplizieren und durch den Dividendus dividieren.

Bew. Der Quotient $a : \frac{b}{c}$ gibt, mit dem Divisor $\frac{b}{c}$ multipliziert, den Dividendus a. Also muß die rechte Seite, wenn sie gleich der linken sein soll, dieselbe Eigenschaft haben. Dies ist der Fall, denn

$$\left(\frac{a \cdot c}{b}\right) \cdot \frac{b}{c} = \frac{\left(\frac{a \cdot c}{b}\right) \cdot b}{c} \text{ (5, Erklärung)}$$

$$= \frac{a \cdot c}{c} \text{ (Defin.)} = a \text{ (Defin.)}.$$

Zusatz: Aus den obigen Sätzen folgen die Formeln

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

8) **Lehrsatz V.** $\quad \frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}.$

Der Wert eines Quotienten bleibt ungeändert, wenn man den Dividendus und den Divisor durch dieselbe Zahl dividiert (**Heben eines Bruches**).

Beweise, daß die rechte Seite mit $b\,n$ multipliziert $a\,n$ ergibt.

Umkehrung. Der Wert eines Quotienten bleibt unverändert, wenn man den Dividendus und den Divisor mit derselben Zahl multipliziert (**Erweitern eines Bruches**).

9) Die Sätze über Multiplikation und Division gelten auch für gebrochene Zahlen.

10) Die Ausführung der Rechnung mit Brüchen (§ 3) ergibt sich aus den Divisionssätzen.

11) Aus der Vorzeichenregel des § 45 (7) folgt:

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \qquad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b},$$

$$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}, \qquad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}.$$

Vorzeichenregel. Der Quotient von zwei gleichstimmigen Größen ist positiv, der Quotient von zwei ungleichstimmigen Größen ist negativ.

12) Die Divisionssätze gelten auch für algebraische Größen.

13) Zusätze.

Zusatz 1. Soll eine algebraische Summe von Quotienten in einen Quotienten verwandelt werden, so bringt man alle Glieder durch Erweitern (Lehrs. V, Umkehrung) zuerst auf den Hauptnenner (vgl. § 3, 9) und wendet dann die Umkehrung von I an.

Beispiel:

$$\frac{3}{2a} - \frac{4}{3n} + \frac{7}{an} - 2 = \frac{9n}{6an} - \frac{8a}{6an} + \frac{42}{6an} - \frac{12an}{6an}$$

$$= \frac{9n - 8a + 42 - 12an}{6an}.$$

Zusatz 2. Die Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers (§ 2, 12) läßt sich in der folgenden Form darstellen:

Ist	$a : b = q_1$ Rest r_1	oder	$a = q_1 b + r_1$
	$b : r_1 = q_2$ Rest r_2		$b = q_2 r_1 + r_2$
	$r_1 : r_2 = q_3$ Rest r_3		$r_1 = q_3 r_2 + r_3$
	$r_2 : r_3 = q_4$ Rest 0		$r_2 = q_4 r_3$,

dann ist r_3 der größte gemeinsame Teiler von a und b.

Zusatz 3. Ausführung der algebraischen Division.

Man ordnet den Dividendus und den Divisor gleichmäßig — nach steigenden oder fallenden Potenzen einer Größe — und dividiert das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors; dadurch erhält man das erste Glied des Quotienten. Mit diesem multipliziert man den Divisor und subtrahiert das erhaltene Produkt vom Dividendus. (Im Beispiele sind die umgekehrten Vorzeichen über die ursprünglichen gesetzt.) Dann dividiert man das erste Glied des Restes wiederum durch das erste Glied des Divisors u. s. f.

Beispiel.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad D \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad d \qquad\qquad\qquad\qquad a+b+c \\ (12x^5+2x^4-15x^3+13x^2-17x+5):(4x^3-2x^2+3x-1)=3x^2+2x-5 \\ \mp 12x^5 \pm 6x^4 \mp 9x^3 \pm 3x^2 \\ \hline r_1 = 8x^4-24x^3+16x^2-17x+5 \\ \mp 8x^4 \pm 4x^3 \mp 6x^2 \pm 2x \\ \hline r_2 = -20x^3+10x^2-15x+5 \\ \pm 20x^3 \mp 10x^2 \pm 15x \mp 5 \\ \hline r_3 = 0. \end{array}$$

Zum Beweise der Richtigkeit des Verfahrens mögen der Dividendus mit D, der Divisor mit d, die bei dem Verfahren auftretenden Teilquotienten mit a, b, c ...., die Reste mit r_1, r_2, r_3 .... bezeichnet werden.

Dann ergibt das Verfahren

$$D - a \cdot d = r_1$$

$$r_1 - b \cdot d = r_2$$

$$r_2 - c \cdot d = r_3 \text{ (im Beispiel ist } r_3 = 0\text{)},$$

oder auch $D - a \cdot d - b \cdot d - c \cdot d = 0$,

d. h. $D = a \cdot d + b \cdot d + c \cdot d$

oder $D = d\ (a + b + c)$ (§ 45, Lehrs. III, Umkehr.),

d. h. $\frac{D}{d} = a + b + c$.

§ 48. Verhältnisse und Proportionen.

1) **Erklärung.** Sind a und b gleichartige Größen, so heißt der Quotient $\frac{a}{b}$ auch das Verhältnis von a zu b; in diesem Falle bedeutet $\frac{a}{b}$ die Zahl, die angibt, wie oft b in a enthalten ist (Division des Messens).

Auch ein Zahlenquotient kann als ein Verhältnis angesehen werden, da unbenannte Zahlen gleichartige Größen sind.

2) Zwei Größen heißen **kommensurabel**, wenn sich ein gemeinsames Maß für beide angeben läßt (vgl. § 32, 3). Das Verhältnis von zwei kommensurabeln Größen ist eine **rationale** (d. h. ganze oder gebrochene) Zahl.

Die Aufsuchung des größten gemeinsamen Maßes zweier Größen (z. B. zweier Strecken) geschieht wie diejenige des größten

gemeinsamen Teilers (vgl. § 32, 2). — Das Verhältnis zweier Größen kann durch das Verhältnis ihrer Maßzahlen ersetzt werden.

3) Zwei Größen heißen **inkommensurabel**, wenn sich kein gemeinsames Maß für beide angeben läßt. Das Verhältnis von zwei inkommensurabeln Größen ist eine **irrationale** Zahl (d. h. durch keine ganze oder gebrochene Zahl genau angebbar).

Für das Verhältnis von zwei inkommensurabeln Größen lassen sich Näherungswerte aufstellen, indem man das Verfahren der Aufsuchung des gemeinsamen Maßes bei einem beliebigen Reste abbricht und beide Größen als Vielfache des vorhergehenden Restes darstellt.

Beispiel. Sind a und b zwei inkommensurable Größen, für die die Gleichungen gefunden sind:

$$\begin{aligned} a &= 5\,b + r_1 \\ b &= 3\,r_1 + r_2 \\ r_1 &= 2\,r_2 + r_3 \quad (\text{wo } r_1 > r_2 > r_3), \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

so wird, je nachdem man r_3 vernachlässigt oder durch r_2 ersetzt,

$$r_1 = 2\,r_2,\ b = 7\,r_2,\ a = 37\,r_2,\ \frac{a}{b} = \frac{37}{7},\ \text{oder}$$

$$r_1 = 3\,r_2,\ b = 10\,r_2,\ a = 53\,r_2,\ \frac{a}{b} = \frac{53}{10};$$

diese Brüche $\frac{37}{7}$ und $\frac{53}{10}$ sind Näherungswerte von $\frac{a}{b}$.

4) Die Divisionssätze gelten auch für Verhältnisse.

Denn sofern sich ein Verhältnis als eine Zahl darstellen läßt, unterliegt es der Definition des Quotienten (§ 47, 1 b).

5) **Erklärung. Proportion** heißt eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen.

$$a : b = c : d \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

a und d heißen **Außenglieder**, b und c **Innenglieder**;
a „ c „ **Vorderglieder**, b „ d **Hinterglieder**.

Aus der vorstehenden Proportion ergeben sich folgende Lehrsätze:

6) **Lehrsatz 1.** $ad = bc$.

In jeder Zahlenproportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

Bew. Multipliziert man die Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ mit } b \cdot d,$$

so ergibt sich $\frac{a \cdot bd}{b} = \frac{c \cdot bd}{d}$ (§ 47, Lehrs. II, Umkehrung),

oder $a \cdot d = b \cdot c$ (§ 47, Lehrs. V).

7) Lehrsatz II. a) $a : c = b : d$,

b) $d : b = c : a$.

In jeder Proportion lassen sich a) die Innenglieder miteinander, b) die Außenglieder miteinander vertauschen.

Bew. a) Dividiert man die Gleichung $ad = bc$ durch cd,

so ergibt sich $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

b) Dividiert man die Gleichung $ad = bc$ durch ab,

so ergibt sich $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

8) Erklärung. In zwei Proportionen

$$a : b = c : d$$
$$u : v = w : s$$

heißen a und u, b und v, c und w, d und s entsprechende Glieder.

9) Lehrsatz III. Sind in zwei Proportionen drei entsprechende Glieder einander gleich, so sind es auch die vierten.

Vor. $a : b = c : p$

$a : b = c : q$.

Beh. $p = q$.

Bew. Aus der Vor. folgt $c : p = c : q$, also

$cq = cp$, nach Lehrs. I, demnach

$q = p$.

10) Lehrsatz IV. $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

In jeder Proportion verhält sich die Summe [Differenz] der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe [Differenz] der Glieder des zweiten wie die Vorderglieder zueinander oder wie die Hinterglieder zueinander.

Bew. Durch Addition [Subtraktion] von 1 zu der vorausgesetzten Proportion ergibt sich:

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$$

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \quad \text{(vgl. § 47, 13, Zus. 1)}$$

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d} \quad \text{(IIa)}.$$

Folgerungen. a) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zu ihrer Differenz wie die Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses zu ihrer Differenz.

Bew. Nach IV ist

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$$

und $$\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d},$$

folglich auch $$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$$

oder $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad \text{(IIa)}.$$

b) $$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

In jeder Proportion verhält sich die Summe [Differenz] der Vorderglieder zur Summe [Differenz] der Hinterglieder wie die Glieder eines Verhältnisses zueinander.

Dies folgt aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ebenso wie IV, nach Anwendung von IIa.

c) $$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}.$$

In jeder Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zu ihrer Differenz wie die Summe der Hinterglieder zu ihrer Differenz.

Dies folgt aus b) ebenso wie a) aus dem Lehrs. IV.

11) **Erklärung.** Eine **laufende Proportion** entsteht, wenn mehr als zwei Verhältnisse durch Gleichheitszeichen verbunden werden, z. B.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots.$$

12) **Lehrsatz V.** $$\frac{a+b+c+\ldots}{a'+b'+c'+\ldots} = \frac{a}{a'} = \ldots.$$

In jeder laufenden Proportion verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Bew. Setzt man

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$ und addiert man die Gleichungen $a = a'k$, $b = b'k$ u. s. f., so ergibt sich $a + b + c \ldots = (a'k + b'k + c'k \ldots) = (a' + b' + c' \ldots)k$

(§ 45, Lehrs. III, Umkehr.). Folglich ist

$$\frac{a + b + c + \ldots}{a' + b' + c' + \ldots} = k = \frac{a}{a'} = \ldots$$

Anmerkung. Der Lehrsatz IV und die Folgerungen aus ihm lassen sich auch als besondere Fälle aus dem Lehrsatz V ableiten.

13) **Erklärung. Stetige Proportion** heißt eine Proportion, in der die Innenglieder gleich sind. Z. B. $a : b = b : c$.

b heißt die **mittlere Proportionale** zwischen a und c.

§ 49. Potenzierung.

1) **Erklärung.** Eine Zahl a mit einer Zahl n **potenzieren** heißt ein Produkt bilden, das die Zahl a n-mal als Faktor enthält.

Eine Potenz ist demnach ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren.

Definitionsgleichung. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren.}}$

a heißt **Grundzahl** oder **Basis**, n **Exponent**, a^n ist die n^{te} **Potenz von a.**

Der Exponent kann hiernach nur eine natürliche Zahl sein. Die Grundzahl kann positiv oder negativ, ganz oder gebrochen sein.

Ist die Grundzahl positiv, so sind alle Potenzen positiv. Ist sie negativ, so sind alle geraden Potenzen positiv, alle ungeraden negativ.

Ist die Grundzahl ein (echter oder unechter) Bruch, so ist auch jede Potenz derselben ein (echter oder unechter) Bruch.

Die zweiten Potenzen der natürlichen Zahlen heißen Quadratzahlen, die dritten Potenzen Kubikzahlen (s. Anh. Tabelle IV).

2) **Lehrsatz I.** $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$.

Statt ein Produkt zu potenzieren, darf man die Faktoren einzeln potenzieren und die erhaltenen Potenzen miteinander multiplizieren.

Bew. Es ist

$(abc)^n = abc \cdot abc \cdot abc \ldots (\text{n mal})$

$= a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots (\text{n mal}) \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots (\text{n mal}) \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \ldots (\text{n mal})$

$= a^n \cdot b^n \cdot c^n$.

Umkehrung. Statt Potenzen mit gleichen Exponenten zu multiplizieren, darf man das Produkt der Grundzahlen mit dem Exponenten potenzieren.

3) **Lehrsatz II.** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Statt einen Quotienten zu potenzieren, darf man den Dividendus und Divisor einzeln potenzieren und die erste Potenz durch die zweite dividieren.

Bew. Es ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\ldots(\text{n mal})$$
$$= \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\ldots(\text{n mal})}{b\cdot b\cdot b\cdot b\ldots(\text{n mal})}$$
$$= \frac{a^n}{b^n}.$$

Umkehrung. Statt eine Potenz durch eine andere mit gleichem Exponenten zu dividieren, darf man den Quotienten der Grundzahlen des Dividendus und des Divisors mit dem Exponenten potenzieren.

4) **Lehrsatz III.** $(a^n)^p = a^{np}$.

Statt mit mehreren Zahlen nacheinander zu potenzieren, darf man mit ihrem Produkt potenzieren.

Bew. Es ist $(a^n)^p = a^n\cdot a^n\cdot a^n\ldots(\text{p mal})$
$= (a\cdot a\cdot a\ldots(\text{p mal}))^n$ (Lehrs. I, Umk.)
$= a\cdot a\ldots(\text{n}\cdot\text{p mal})$
$= a^{np}$.

Umkehrung. Statt mit einem Produkt zu potenzieren, darf man mit den einzelnen Faktoren nacheinander potenzieren.

Folgerung. Wenn mehrere Potenzierungen nacheinander vorgenommen werden sollen, so ist die Reihenfolge gleichgültig.

Denn $(a^n)^p$ und $(a^p)^n$ geben beide a^{np}.

5) **Lehrsatz IV.** $a^n\cdot a^p\cdot a^q = a^{n+p+q}$.

Statt Potenzen mit gleicher Grundzahl miteinander zu multiplizieren, darf man die Grundzahl mit der Summe der Exponenten potenzieren.

Bew. Es ist

$$a^n = a\cdot a\cdot a\ldots(\text{n mal})$$
$$a^p = a\cdot a\cdot a\ldots(\text{p mal})$$
$$a^q = a\cdot a\cdot a\ldots(\text{q mal})$$
$$a^n\cdot a^p\cdot a^q = a\cdot a\cdot a\ldots((\text{n}+\text{p}+\text{q})\text{ mal})$$
$$= a^{n+p+q}.$$

Umkehrung. Statt mit einer Summe zu potenzieren, darf man mit den Summanden einzeln potenzieren und die erhaltenen Potenzen multiplizieren.

6) **Lehrsatz V.** $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

Statt eine Potenz durch eine andere mit gleicher Grundzahl zu dividieren, darf man vom Exponenten des Dividendus den des Divisors subtrahieren und dann die Grundzahl mit der erhaltenen Differenz potenzieren.

Bew. Es ist

$$\begin{aligned} a^n &= a \cdot a \cdot a \ldots (\text{n mal}) \\ a^p &= a \cdot a \cdot a \ldots (\text{p mal}) \\ \frac{a^n}{a^p} &= \frac{a \cdot a \cdot a \ldots (\text{n mal})}{a \cdot a \cdot a \ldots (\text{p mal})} \\ &= a \cdot a \cdot a \ldots ((\text{n} - \text{p}) \text{ mal}) \\ &= a^{n-p}. \end{aligned}$$

Umkehrung. Statt mit einer Differenz zu potenzieren, darf man mit dem Minuendus und dem Subtrahendus einzeln potenzieren und die zuerst erhaltene Potenz durch die andere dividieren.

Der Lehrsatz V ist zunächst der Beschränkung $n > p$ unterworfen.

Dagegen ist für $n = p$, $\frac{a^n}{a^n} = 1$,

und für $n < p$, $\frac{a^n}{a^p} = \frac{1}{a^{p-n}}$.

In allen drei Fällen, also ohne Einschränkung, läßt sich die Formel des Lehrsatzes V erst dann anwenden, wenn man eine Erweiterung des Potenzbegriffs vornimmt. Dies geschieht durch Einführung des **algebraischen Exponenten.**

7) **Erklärungen.** Mit einer negativen Zahl potenzieren bedeutet mit der absoluten Zahl potenzieren und 1 durch die erhaltene Potenz dividieren.

a^0 ist nur eine andere Form für 1.

Mit einer positiven Zahl potenzieren bedeutet nichts anderes, als mit der absoluten Zahl potenzieren.

Definitionsgleichungen. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$, $a^{+n} = a^n$.

8) Alle Sätze über Potenzierung gelten auch für algebraische Exponenten.

I. $(a \cdot b \cdot c)^{-n} = a^{-n} b^{-n} c^{-n}$, IV. $a^{+n} \cdot a^{-p} \cdot a^{-q} = a^{+n-p-q}$,

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$, V. $\frac{a^{+n}}{a^{-p}} = a^{n+p}$,

III. $(a^{+n})^{-p} = a^{-np}$, $\frac{a^{-n}}{a^{+p}} = a^{-n-p}$, u. s. w.

$(a^{-n})^{-p} = a^{+np}$, u. s. w.

Rechenregel. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

Zusätze. 1. Gleiches mit gleichen Exponenten potenziert, gibt gleiche Potenzen.

2. Sind zwei Potenzen einander gleich und haben sie gleiche Grundzahlen, so sind auch ihre Exponenten einander gleich.

3. Sind zwei Potenzen einander gleich und haben sie gleiche Exponenten, so sind auch ihre Grundzahlen einander gleich.

§ 50. Radizierung.

1) Erklärung. Eine Zahl a mit einer Zahl n radizieren heißt die Grundzahl suchen, die mit n potenziert den Potenzwert a ergibt.

a heißt Radikandus, n Wurzelexponent.

Definitionsgleichung. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$.

Die n^{te} Wurzel aus a ist also diejenige Zahl, die die Eigenschaft hat, mit n potenziert a zu geben.

Folgerung. Radizierung und Potenzierung mit derselben Zahl heben einander auf.

Der Exponent n sei zunächst eine natürliche Zahl.

Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man $\sqrt{a}$, und spricht „Quadratwurzel aus a" oder kürzer „Wurzel aus a". Für $\sqrt[3]{a}$ spricht man auch „Kubikwurzel aus a" (s. Anhang, Tabelle IV).

2) Ist der Radikandus positiv, so ist jede Wurzel mit ungeradem Exponenten positiv, jede Wurzel mit geradem Exponenten aber hat zwei entgegengesetzte gleiche Werte (einen positiven und einen negativen).

Ist der Radikandus negativ, so ist jede Wurzel mit ungeradem Exponenten negativ.

Eine Wurzel mit geradem Exponenten aus einem negativen Radikandus hat keinen durch die bisher betrachteten Zahlen angebbaren Wert, da keine der Zahlen mit einer geraden Zahl potenziert einen negativen Wert ergibt.

Eine Wurzel aus einer ganzen Zahl ist entweder wieder eine ganze oder eine irrationale Zahl (§ 48, 3), aber nie ein Bruch.

Eine Wurzel aus einem Bruche ist entweder wieder ein Bruch, oder eine irrationale Zahl.

Eine Wurzel aus einer irrationalen Zahl ist wieder eine irrationale Zahl.

3) Lehrsatz I. $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$.

Statt ein Produkt zu radizieren, darf man die Faktoren einzeln radizieren und die erhaltenen Wurzeln miteinander multiplizieren.

Bew. $\sqrt[n]{abc}$ ist diejenige Zahl, die mit n potenziert abc ergibt. Soll der rechts stehende Ausdruck gleich dieser Wurzel sein, so muß er mit n potenziert abc ergeben. Dies ist der Fall, denn

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{c}\right)^n \text{ (§ 49, Lehrsatz I)}$$
$$= a \cdot b \cdot c \text{ (Defin.)}.$$

Umkehrung. Statt Wurzeln mit gleichen Exponenten miteinander zu multiplizieren, darf man das Produkt der Radikanden mit demselben Exponenten radizieren.

4) Lehrsatz II. $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Statt einen Quotienten zu radizieren, darf man den Dividendus und den Divisor einzeln radizieren und die zuerst erhaltene Wurzel durch die andere dividieren.

Bew. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ist diejenige Zahl, die mit n potenziert $\frac{a}{b}$ ergibt. Soll die rechte Seite gleich dieser Wurzel sein, so muß auch sie mit n potenziert $\frac{a}{b}$ ergeben. Dies ist der Fall, denn

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} \text{ (§ 49, Lehrs. II)}$$
$$= \frac{a}{b} \text{ (Defin.)}.$$

Umkehrung. Statt eine Wurzel durch eine andere mit demselben Exponenten zu dividieren, darf man den Quotienten der Radikanden mit dem Exponenten radizieren.

5) **Lehrsatz III.** $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$.

Wenn nacheinander eine Potenzierung und eine Radizierung vorgenommen werden sollen, so ist die Reihenfolge gleichgültig.

Bew. $\sqrt[n]{a^p}$ ist diejenige Zahl, die mit n potenziert a^p ergibt. Soll die rechte Seite gleich der Wurzel sein, so muß auch sie mit n potenziert a^p ergeben. Dies ist der Fall, denn

$$\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^p\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^p \text{ (§ 49, Lehrs. III, Folg.)}$$
$$= a^p \text{ (Defin.).}$$

6) **Lehrsatz IV.** $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Statt mit mehreren Zahlen nacheinander zu radizieren, darf man mit ihrem Produkt radizieren.

Bew. $\sqrt[np]{a}$ ist diejenige Zahl, die mit np potenziert a ergibt. Soll die linke Seite gleich dieser Wurzel sein, so muß auch sie mit np potenziert a ergeben. Dies ist der Fall, denn

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^n\right)^p \text{ (§ 49, Lehrs. III, Umkehrung)}$$
$$= \left(\sqrt[p]{a}\right)^p = a \text{ (Defin.).}$$

Umkehrung. Statt mit einem Produkt zu radizieren, darf man mit den Faktoren nacheinander (in beliebiger Reihenfolge) radizieren.

Folgerung. Wenn mehrere Radizierungen nacheinander vorgenommen werden sollen, so ist ihre Reihenfolge gleichgültig.

Denn $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}$ und $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$ geben beide $\sqrt[np]{a}$.

7) **Lehrsatz V.** $\sqrt[nq]{a^{pq}} = \sqrt[n]{a^p}$.

Eine Wurzel aus einer Potenz bleibt ungeändert, wenn man den Wurzelexponenten und den Potenzexponenten durch dieselbe Zahl dividiert (oder mit derselben Zahl multipliziert).

Bew. $\sqrt[nq]{a^{pq}}$ ist diejenige Zahl, die mit nq potenziert a^{pq} ergibt. Soll die rechte Seite gleich dieser Wurzel sein, so muß auch sie mit nq potenziert a^{pq} ergeben. Dies ist der Fall, denn

$$\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^{nq} = \left(\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^n\right)^q \text{ (§ 49, Lehrs. III, Umkehrung)}$$
$$= (a^p)^q \text{ (Defin.)}$$
$$= a^{pq} \text{ (§ 49, Lehrs. III).}$$

Folgerung. Unter der Voraussetzung, daß p durch n teilbar ist, erhält man

$$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[1]{a^{\frac{p}{n}}} = \right) a^{\frac{p}{n}},$$

d. h. statt eine Potenz zu radizieren, deren Exponent durch den Wurzelexponenten teilbar ist, darf man die Grundzahl mit dem Quotienten der Exponenten potenzieren.

An diese Folgerung schließt sich, unter Aufhebung der Beschränkung, daß p durch n teilbar sein muß, die folgende Erweiterung des Potenzbegriffs für **gebrochene und irrationale Exponenten.**

8) **Erklärung.** Mit einem Bruche potenzieren bedeutet nacheinander mit dem Zähler potenzieren und mit dem Nenner radizieren.

Definitionsgleichung. $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$.

Hierdurch ist die Potenzierung so erweitert, daß sie die Radizierung als besonderen Fall einschließt.

9) Alle Sätze über Potenzierung gelten auch für gebrochene Exponenten.

10) **Vorbemerkung.** Für jede irrationale Zahl lassen sich als Näherungswerte rationale (ganze oder gebrochene) Zahlen angeben.

So findet man $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$
$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143.$

Ein Näherungswert für $\sqrt{2}$ ist daher z. B. $\frac{14142}{10000}$.

11) **Erklärung.** Mit einer irrationalen Zahl potenzieren bedeutet mit einem Näherungswerte der irrationalen Zahl potenzieren. Der Grenzwert, dem sich die Potenz nähert, wenn sich der Exponent der irrationalen Zahl nähert, ist die Potenz mit irrationalem Exponenten.

12) Alle Sätze über Potenzierung gelten auch für irrationale Exponenten.

Anmerkung. Wie der Potenzexponent, so darf auch der Wurzelexponent eine negative, gebrochene oder irrationale Zahl sein.

13) Alle Sätze über Radizierung gelten auch für negative, gebrochene oder irrationale Wurzelexponenten.

Zusatz. Gleiches mit Gleichem radiziert, gibt gleiche Wurzeln.

14) Das Ausziehen der Quadrat- und der Kubik-Wurzeln.

Man benutzt die Formeln:

$$(a+b+c+d+\ldots)^2$$
$$= a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2+\ldots$$
$$(a+b+c+d+\ldots)^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3+\ldots$$

Beispiel 1. $\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{4}{3}x^2+8x^3+x^4-12x^5+36x^6} = \overset{a\ +\ b\ +\ c}{\frac{2}{3}-x^2+6x^3}$

$a^2 \mid \mp\frac{4}{9}$

$$-\frac{4}{3}x^2+8x^3+x^4 : \frac{4}{3}$$

$2ab+b^2 \mid \pm\frac{4}{3}x^2 \quad \mp x^4$

$$8x^3 \quad -12x^5+36x^6 : \frac{4}{3}$$

$2(a+b)c+c^2 \mid 8x^3 \quad -12x^5+36x^6$

Beispiel 2. $\sqrt[3]{1-6x+21x^2-44x^3+63x^4-54x^5+27x^6} = \overset{a\ +\ b\ +\ c}{1-2x+3x^2}$

$a^3 \mid 1$

$$-6x+21x^2-44x^3 : 3$$

$3a^2b+3ab^2+b^3 \mid \pm 6x \mp 12x^2 \pm 8x^3$

$$9x^2-36x^3+63x^4-54x^5+27x^6 : 3$$

$3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 \mid 9x^2-36x^3+36x^4+27x^4-54x^5+27x^6$

Der Beweis für das Verfahren stützt sich auf die Definition der Wurzel.

Beispiel 3. $\sqrt{1|75|29|76} = 1\ 3\ 2\ 4$ ($a+b+c+d$)

1

75 : 2
69

6 29 : 26
5 24

1 05 76 : 264
1 05 76

Wie in den Fällen, wo die Rechnung nicht aufgeht, die abgekürzte Division (§ 4) angewendet werden kann, zeigt im folgenden Beispiele die abgekürzte Ausziehung der Quadratwurzel.

Beispiel 4. $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2} = 1{,}4142135(6)$.

1

100 : 2
96

400 : 28
281

11900 : 282
11296

60400 : 2828
56564

3836 : 28284
2828

1008
848

160
141

19

100 : 2

400 : 28

11900 : 282

60400 : 2828

3836 : 28284

1008

160

19

Beispiel 5. $\sqrt[3]{12|977,|875} = 2\ 3,\ 5$ ($a+b+c$)

a^3	8	
	4 977 : 12	
$3a^2b$	3 6	
$3a\,b^2$	54	
b^3	27	
	810 875 : 1587	
$3(a+b)^2c$	793 5	
$3(a+b)\,c^2$	17 25	
c^3	125	

§ 51. Logarithmierung.

1) **Erklärung.** Eine Zahl a für eine Grundzahl b logarithmieren heißt den Potenzexponenten suchen, mit dem man die Grundzahl (oder Basis) b potenzieren muß, um den „Numerus" a zu erhalten. — a heißt Logarithmandus.

Der Logarithmus der Zahl a für die Basis b ist die Zahl, mit der man b potenzieren muß, um a zu erhalten.

Ist die Radizierung die erste Umkehrung der Potenzierung, so ist die Logarithmierung die zweite.

Jede dieser drei Rechnungsarten liefert eine andere Aufgabe, nämlich x zu finden

bei der Potenzierung aus $b^n = x$,
bei der Radizierung aus $x^n = a$,
bei der Logarithmierung aus $b^x = a$.

2) Die Logarithmen mit der Basis 10*) heißen gemeine oder Briggssche Logarithmen**).

Das Zeichen für den „Logarithmus mit der Basis 10" ist log.

Anmerkung. Für log a schreibt man auch $\lg a$.

Definitionsgleichung. $10^{\log a} = a$.

3) **Lehrsatz I.** $\log ab = \log a + \log b$.

Statt ein Produkt zu logarithmieren, darf man die Faktoren einzeln logarithmieren und die erhaltenen Logarithmen addieren.

Bew. log ab ist diejenige Zahl, die als Exponent zu 10 gesetzt, den Numerus ab ergibt. Der rechts stehende Ausdruck ist gleich diesem Logarithmus, denn

$10^{\log a + \log b} = 10^{\log a} \cdot 10^{\log b}$ (§ 49, Lehrs. IV, Umkehrung),

$= a \cdot b$ (Definition).

Wie lautet die Umkehrung?

4) **Lehrsatz II.** $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

Statt einen Quotienten zu logarithmieren, darf man den Dividendus und den Divisor einzeln logarithmieren und den zweiten Logarithmus vom ersten subtrahieren.

---

*) Für das Zahlenrechnen kommt nur die Grundzahl 10 in Betracht, sodaß nur diese hier berücksichtigt wird.

**) Briggs, † 1630 in Oxford, gab 1617 Logarithmorum Chilias prima und 1624 eine Arithmetica logarithmica heraus.

Man beweise, daß die rechte Seite als Exponent zu 10 gesetzt den Numerus $\frac{a}{b}$ ergibt.

Umkehrung?

5) Lehrsatz III. $\log a^n = n \cdot \log a$.

Statt eine Potenz zu logarithmieren, darf man den Logarithmus der Grundzahl mit dem Potenzexponenten multiplizieren.

Man beweise, daß die rechte Seite, als Exponent zu 10 gesetzt, den Numerus a^n ergibt.

Umkehrung?

6) Lehrsatz IV. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$.

Statt eine Wurzel zu logarithmieren, darf man den Logarithmus des Radikandus durch den Wurzelexponenten dividieren.

Der Beweis folgt entweder aus III, wenn man statt n den Bruchexponenten $\frac{1}{n}$ nimmt, oder er ist auch zu führen, indem man zeigt, daß die rechte Seite als Exponent zu 10 gesetzt den Numerus $\sqrt[n]{a}$ ergibt.

Umkehrung?

7) Zusatz. Dieselben Sätze gelten auch für jede andere Basis als 10.

8) Aufgabe. Den Logarithmus einer Zahl a für die Basis b zu finden, wenn der Logarithmus derselben Zahl für die Basis 10 gegeben ist.

Aus $b^x = a$

und $10^{\log b} = b$

erhält man $(10^{\log b})^x = b^x = a$,

$10^{x \log b} = 10^{\log a}$,

also $x \log b = \log a$. Es ergibt sich also für den Logarithmus x der Zahl a zur Basis b der Ausdruck

$$x = \frac{\log a}{\log b}.$$

9) a) Die Briggsschen Logarithmen rationaler Zahlen sind entweder ganze oder transzendente (§ 40, 6) Zahlen. Letztere werden näherungsweise durch Dezimalbrüche dargestellt. Die Dezimalstellen bilden die Mantisse (Zugabe), die zugehörigen Ganzen bilden die Kennziffer (Charakteristik).

b) Alle Numeri, die durch Multiplikation oder Division mit dekadischen Einheiten auseinander entstehen, haben dieselbe Mantisse.

Die Mantissen werden in den Logarithmentafeln aufgeschlagen.

c) Bezeichnet man als **Ordnungszahl** einer Ziffer den Exponenten der zugehörigen Potenz von 10, so gilt folgende Regel:

Die Kennziffer eines Logarithmus ist gleich der Ordnungszahl der höchsten giltigen Ziffer des Numerus,

z. B. $\log 12{,}8 = 1{,}10721$,

denn die höchste Ziffer des Numerus (1) ist mit 10^1 zu multiplizieren, hat also die Ordnungszahl 1;

$\log 0{,}00128 = 0{,}10721 - 3 = 7{,}10721 - 10$*),

denn die höchste giltige Ziffer des Numerus (1) ist mit 10^{-3} zu multiplizieren, hat also die Ordnungszahl -3 oder $7, \ldots - 10$.

d) Logarithmen von negativen Zahlen sind unmöglich.

10) Da jede Zahl nur auf eine einzige Art als Potenz von 10 dargestellt werden kann, so gilt der Satz: **Gleiche Zahlen haben gleiche Logarithmen.** Also folgt aus $x = y$

$\log x = \log y$ („Die Gleichung ist logarithmiert").

11) **Logarithmierung zusammengesetzter Ausdrücke.**

Ist x aus den gegebenen Zahlen a, b und c mit Hilfe der Gleichung

$$x = \frac{a\,b}{c}$$

zu berechnen, so logarithmiert man die Gleichung (10), wodurch man erhält (nach 3 und 4)

$$\log x = \log a + \log b - \log c.$$

Kennt man nun die Logarithmen von a, b und c aus der Logarithmentafel, so kann man zunächst den Logarithmus von x berechnen und dann in den Tafeln den dazu gehörigen Numerus, also den Wert von x, aufschlagen.

§ 52. Gleichungen ersten und zweiten Grades.

1) Jede Verbindung zweier Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen heißt **Gleichung.**

Jeder arithmetische Lehrsatz läßt sich in der Form einer Gleichung aussprechen, deren Eigentümlichkeit darin liegt, daß für alle Werte der in ihr enthaltenen Buchstabengrößen der Wert ihrer **linken Seite** gleich dem der **rechten** ist.

Dagegen ist dies z. B. in der Gleichung

$$\frac{57 - 5x}{7} = x + 3$$

*) Der Gleichmäßigkeit wegen empfiehlt es sich, die negative Kennziffer immer auf den Wert 10 zu bringen.

nur dann der Fall, wenn man für x den Wert 3 einsetzt. Eine derartige Gleichung enthält also zugleich eine Aufgabe, nämlich: den Wert von x zu finden oder zu bestimmen, der der Gleichung genügt (daher Bestimmungsgleichung). Man nennt deshalb x die unbekannte Größe oder kürzer die **Unbekannte** der Gleichung.

In den Gleichungen bezeichnen a, b, c ... bestimmte oder gegebene Größen, x, y, z ... gesuchte Größen oder Unbekannte, d. h. diejenigen Größen, die durch die gegebenen Größen ausgedrückt werden sollen.

Eine Gleichung heißt vom **ersten Grade** (oder linear), wenn nach Fortschaffung der Klammern und Nenner die Unbekannte nur in der ersten Potenz vorhanden ist. Wenn (nach denselben Umformungen) die Unbekannte in keiner höheren als der zweiten Potenz vorkommt, so heißt die Gleichung vom **zweiten Grade** (oder **quadratisch**).

2) Die Lösung der Gleichungen beruht auf der Anwendung der arithmetischen Lehrsätze zur Umformung und Vereinfachung der Seiten, sowie insbesondere auf der Anwendung der Grundsätze 11—16 des § 6 (denen noch die Zusätze von § 49, 8, § 50, 13 und § 51, 10 hinzuzufügen sind).

Vor allem ist

1) die Unbekannte aus dem Nenner fortzuschaffen;
2) die Unbekannte aus den Klammern fortzuschaffen;
3) die Unbekannte von der rechten Seite fortzuschaffen.

Werden dann die gleichnamigen Glieder vereinigt, so kann schließlich jede Gleichung ersten Grades in die Form gebracht werden

$$a\,x = b,$$

wenn a und b beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahlen bedeuten. Die Wurzel, d. h. das Ergebnis der Lösung, ist dann nach § 6, 16

$$x = \frac{b}{a}.$$

Beispiel 1. $\dfrac{17 - x}{2} + x = \dfrac{33 - x}{3}.$

Durch Multiplikation der Gleichung mit 6 (§ 6, 15) erhält man

$$51 - 3x + 6x = 66 - 2x$$

$$51 + 3x = 66 - 2x, \text{ oder nach § 6, 13 und 14}$$

$$5x = 15, \text{ oder nach § 6, 16}$$

$$x = 3.$$

Beispiel 2. $\frac{ax}{b} = x + 1.$

$$ax = bx + b \quad (\S\ 6, 15)$$
$$ax - bx = b \quad (\S\ 6, 14)$$
$$x(a - b) = b$$
$$x = \frac{b}{a - b} \quad (\S\ 6, 16).$$

3) Die **rein quadratische Gleichung** läßt sich auf die Form bringen

$$ax^2 = b.$$

Daraus ergibt sich (nach § 6, 16)

$$x^2 = \frac{b}{a}.$$

Die Gleichung hat somit zwei Wurzeln

$$x_1 = + \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad x_2 = - \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Beispiel 3. $\frac{x - 3}{x^2 - 4} + 1 = \frac{1}{x - 2}.$

$$x - 3 + x^2 - 4 = x + 2 \quad (\S\ 6, 15)$$
$$x^2 + x - 7 = x + 2$$
$$x^2 = 9$$
$$x_1 = + 3,$$
$$x_2 = - 3.$$

4) Die **vollständige quadratische Gleichung** hat nach allen Vereinfachungen die Form

$x^2 + ax + b = 0$ (**Normalform** der quadratischen Gleichung)
oder $x^2 + ax = - b.$

Um sie zu lösen, hat man $x^2 + ax$ zu einem vollständigen Quadrat zu ergänzen (die **quadratische Ergänzung** hinzuzufügen).

$$x^2 + 2x \cdot \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b \quad (\S\ 6, 13)$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b \quad (\S\ 46, 1, \text{Umkehr.})$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (\S\ 50, 13, \text{Zusatz}).$$

$$x = - \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}, \text{ d. h.}$$

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Beispiel 4. $\dfrac{4x}{2+x} - 3 = \dfrac{10}{3x}$.

Durch Multiplikation der Gleichung mit dem Hauptnenner $3x(2+x)$ erhält man

$$12x^2 - 9x(2+x) = 10(2+x)$$
$$12x^2 - 18x - 9x^2 = 20 + 10x$$
$$3x^2 - 28x = 20.$$
$$x^2 - \frac{28}{3}x - \frac{20}{3} = 0,$$
$$x = \frac{14}{3} \pm \sqrt{\frac{196}{9} + \frac{20}{3}},$$
$$x = \frac{14}{3} \pm \sqrt{\frac{256}{9}} = \frac{14}{3} \pm \frac{16}{3}$$
$$x_1 = 10, \quad x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Beispiel 5.

$$x^2 - cx + ab - ac - bx = 2c^2 - 2bc + ax$$
$$x^2 - ax - bx - cx = ac - ab - 2bc + 2c^2$$
$$x^2 - (a+b+c)x = ac - ab - 2bc + 2c^2.$$

Demnach

$$x = \frac{a+b+c}{2} \pm \sqrt{ac - ab - 2bc + 2c^2 + \frac{(a+b+c)^2}{4}}.$$

Führt man im Radikandus die Quadrierung aus (nach § 46, 6) und bringt ihn auf den Nenner 4, so nimmt er die Form an

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2 + 6ac - 6bc + 9c^2}{4}.$$

Da dies aber das vollständige Quadrat von $\dfrac{a-b+3c}{2}$ ist, so hat man

$$x = \frac{a+b+c}{2} \pm \frac{a-b+3c}{2},$$

mithin

$$x_1 = a + 2c, \quad x_2 = b - c.$$

5) Eine Gleichung mit zwei Unbekannten, z. B.

$$2x - 3y = 5$$

hat unendlich viele Wurzeln. Denn setzt man beispielsweise für x die Werte $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 4, ... in die Gleichung ein, so ergeben sich als zugehörige Werte von y die Werte $-\frac{4}{3}$, -1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1 ... Ist aber noch gleichzeitig die Gleichung gegeben

$$5x + 7y = 7\tfrac{2}{3},$$

so genügt von den obigen fünf Wertepaaren nur das dritte

$$x = 2 \qquad y = -\tfrac{1}{3}$$

den beiden Gleichungen $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 7y = 7\frac{2}{3} \end{cases}$ und außer diesem überhaupt kein zweites Wertepaar.

Die Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten besteht darin, daß man durch ein geeignetes Rechnungsverfahren eine dritte Gleichung bildet, die nur noch die eine der beiden Unbekannten enthält, daß man also die andere Unbekannte fortschafft (eliminiert).

a) Methode des Einsetzens (der Substitution).

Man löst die eine Gleichung für die eine Unbekannte auf und setzt den für sie gefundenen Wert in die andere Gleichung an Stelle dieser Unbekannten ein (nach § 6, 11).

Man erhält in dem vorher angegebenen Beispiele

$$2x = 5 + 3y, \quad x = \frac{5 + 3y}{2}$$

$$\frac{25 + 15y}{2} + 7y = 7\tfrac{2}{3} \text{ (jetzt ist x eliminiert!)}$$

$$75 + 45y + 42y = 46$$

$$87y = -29$$

$$y = -\tfrac{1}{3}$$

und dann durch Einsetzen dieses Wertes für y in die Gleichung

$$x = \frac{5 + 3y}{2}$$

$$x = 2.$$

b) Methode der Addition.

Man gibt zunächst durch geeignete Multiplikationen der einen Unbekannten in beiden Gleichungen gleiche Faktoren mit entgegengesetzten Vorzeichen, sodaß dann durch Addition der neuen Gleichungen diese Unbekannte fortgeschafft wird.

Multipliziert man z. B. die erste der beiden vorigen Gleichungen mit -5 und die zweite mit 2, so erhält man

$$\begin{aligned} -10x + 15y &= -25 \\ 10x + 14y &= 15\tfrac{1}{3} \\ \hline 29y &= -\tfrac{29}{3}, \\ y &= -\tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Wie in diesem Beispiele, so führt häufig die Additionsmethode am schnellsten zum Ziele.

---

6) Zwei quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten lassen sich teils durch eine dieser beiden Methoden, teils noch einfacher durch andere Kunstgriffe lösen.

Bei Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten sind ebensoviele unabhängige und sich nicht widersprechende Gleichungen erforderlich, wie Unbekannte vorhanden sind.

Man leitet aus n Gleichungen mit n Unbekannten durch Fortschaffen einer Unbekannten zuerst $(n-1)$ Gleichungen mit $(n-1)$ Unbekannten ab und setzt dieses Verfahren fort, bis man zu einer Gleichung mit einer Unbekannten gelangt.

---

7) Die allgemeine Form einer (rationalen) Gleichung

1. Grades mit einer Unbekannten ist $ax + b = 0$,
1. „ „ zwei „ „ $ax + by + c = 0$,
1. „ „ drei „ „ $ax + by + cz + d = 0$,
2. „ „ einer „ „ $ax^2 + bx + c = 0$,
2. „ „ zwei „ „ $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$,
3. „ „ einer „ „ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

u. s. w.

Die von vornherein bekannten Größen a, b, c, $\cdots$ heißen **Koeffizienten** der Gleichung.

Eine Gleichung 1. Grades heißt auch linear,
„ „ 2. „ „ „ quadratisch,
„ „ 3. „ „ „ kubisch,
„ „ 4. „ „ „ biquadratisch.

§ 53. Graphische Lösung von Gleichungen.

1) Ist in der Ebene ein Kreuz von zwei zueinander senkrechten Geraden gegeben, so kann man jeden Punkt der Ebene durch seine Abstände von diesen Geraden bestimmen, also durch zwei Strecken x und y, die **Ortsstrecken** oder **Koordinaten** heißen. Die gegebenen Geraden heißen (Koordinaten-) **Achsen**. Man wählt meist die eine, die x-Achse, wagerecht, die andere, die y-Achse, senkrecht (Fig. 181).

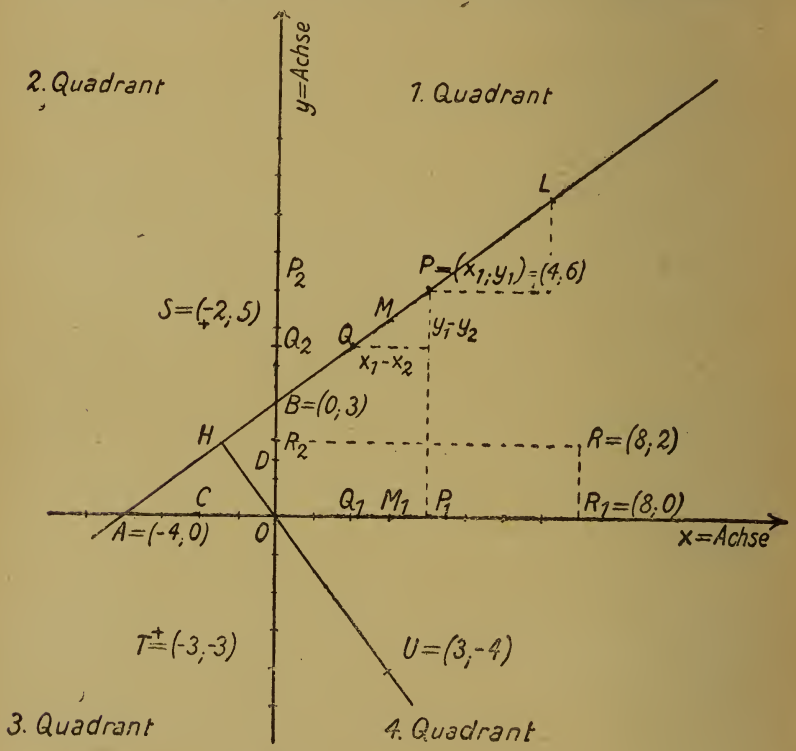


Fig. 181. Längeneinheit ½ cm.

Das Kreuz teilt die ganze Ebene in 4 **Felder** oder **Quadranten**. Um die in ihnen liegenden Punkte zu unterscheiden, gibt man den Ortsstrecken je nach der Richtung verschiedene Vorzeichen. Für einen Punkt im 1. Quadranten (rechts oben) sind beide positiv, im 2. (links oben) ist x negativ, y positiv, im 3. (links unten) sind beide negativ, im 4. (rechts unten) ist x positiv, y negativ.

$P = (x_1; y_1) = (4; 6)$ heißt: der Punkt P hat die Ortsstrecken $x_1 = 4$, $y_1 = 6$ (Fig. 181).

Die gewählte Längeneinheit (z. B. 1 cm oder 2 mm) wird bei der Zeichnung angegeben; die Rechnungen enthalten nur die Maßzahlen der Ortsstrecken nebst den Vorzeichen, also positive oder negative unbenannte Zahlen.

$O = (0; 0)$ ist der Kreuzpunkt oder Nullpunkt.

Diese Bestimmung eines Punktes in der Ebene ist einfacher als die Ortsbestimmung auf der Erde, wo man Kreise statt gerader Linien verwenden muß, nämlich Längen- und Breitenkreise [z. B. Petersburg = (30°; 60°)]. Der geographischen Länge entspricht hier die wagerechte Ortsstrecke x, die auch **Ortslänge** oder **Abszisse** heißt, und der geographischen Breite die senkrechte Ortsstrecke y, die auch **Ortsbreite** oder **Ordinate** genannt wird.

Ortslänge und Ortsbreite eines Punktes sind zugleich Länge und Breite des durch den Punkt im Achsenkreuz bestimmten Rechtecks (z. B. OP_1PP_2 Fig. 181).

2) **Lehrsätze.** Ist $P = (x_1; y_1)$, $Q = (x_2; y_2)$, so ist

a. $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ der Abstand der beiden Punkte (nach Pythagoras § 33, 3),

b. $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ der Mittelpunkt von PQ (nach dem Satz von der Mittellinie des Trapezes § 21, 3). Fig. 181.

Z. B. für $P = (4; 6)$, $Q = (2; 4\frac{1}{2})$ ist $PQ = \sqrt{2^2 + (1\frac{1}{2})^2} = 2\frac{1}{2}$ und $M = (3; 5\frac{1}{4})$.

Diese Formeln gelten auch, wenn die Punkte wie z. B. P und $S = (-1; -4)$ in verschiedenen Quadranten liegen.

Besondere Fälle. 1a) $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2\sqrt{13}$.

1b) $N = \left(\frac{x_1}{2}; \frac{y_1}{2}\right) = (2; 3)$ Mittelpunkt von OP.

2) Für $A = (a; 0) = (-5; 0)$ ist $C = \left(\frac{a}{2}; 0\right) = (-2\frac{1}{2}; 0)$ Mitte von OA.

Für $B = (0; b) = (0; 4)$ ist $D = \left(0; \frac{b}{2}\right) = (0; 2)$ Mitte von OB.

Aufgaben. Aus den Ortsstrecken der 3 Eckpunkte eines Dreiecks kann man die Längen der Seiten und Schwerlinien nach den angegebenen Formeln berechnen; ebenso auch aus den Ortsstrecken der Seitenmittelpunkte; aus 3 Ecken eines Parallelogrammes die 4. u. s. w.

3) Jeder Punkt der x-Achse, aber kein anderer Punkt hat die Ortsbreite $y = 0$; z. B. (Fig. 181) $P_1 = (4; 0)$, $A = (-4; 0)$. Man sagt kurz:

$y = 0$ ist die Gleichung der x-Achse und ebenso

$x = 0$ ist die Gleichung der y-Achse (Fig. 182),

$y = x$ und $y = -x$ sind die Gleichungen der Halbierungslinien der Achsenwinkel,

$x = a$ ist die Gleichung der Parallele zur y-Achse im Abstand a,

$y = b$ ist die Gleichung der Parallele zur x-Achse im Abstand b; a und b können auch negativ sein.

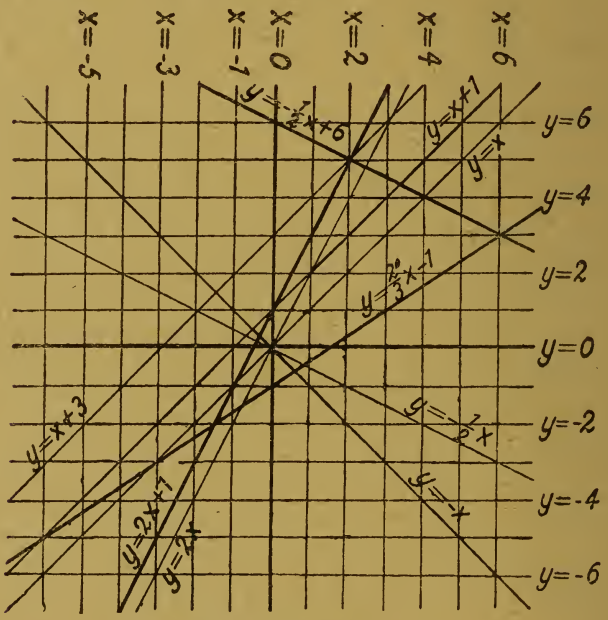


Fig. 182. Längeneinheit 1/2 cm.

Für jeden Punkt der zur 1. Winkelhalbierenden ($y = x$) gezogenen Parallele, die auf der y-Achse die Strecke $+1$ abschneidet, aber für keinen andern Punkt ist die Ortsbreite y um $+1$ größer als die Ortslänge x. Diese Gerade hat also die Gleichung $y = x + 1$. Auf ihr liegen z. B. die Punkte $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(3; 4)$, ferner $(-1; 0)$, $(-2; -1)$ u. s. w. Fig. 182. $y = -x + 3$ oder $x + y = 3$ ist die Gleichung einer Geraden, die der 2. Winkelhalbierenden ($y = -x$) parallel läuft und auf der y-Achse die Strecke $+3$ abschneidet. Es gibt nun einen Punkt, dessen Orts-

strecken beiden Gleichungen genügen; das ist der Punkt $U = (1; 2)$, wie sich sowohl aus der Zeichnung als auch aus der Rechnung ergibt. Dagegen haben die Geraden $y = x + 1$ und $y = x + 3$ keinen gemeinsamen Punkt; beide sind der 1. Winkelhalbierenden ($y = x$) parallel.

$y = \pm x + b$ sind die Gleichungen der zu den Winkelhalbierenden gezogenen Parallelen, die auf der y-Achse die Strecke b abschneiden.

4) Die Gleichung $y = 2x$ stellt eine Gerade dar, die durch die Punkte $(1; 2)$, $(2; 4)$, $(3; 6)$ geht, ferner durch $(0; 0)$, $(-1; -2)$, $(-4; -8)$ u. s. w. (Fig. 182). Daß alle diese Punkte auf einer Gerade liegen, folgt aus dem 1. Ähnlichkeitssatz (§ 35, 5), da in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken die spitzen Winkel bei O gleich sein müssen. Diese Gerade verläuft steiler als die Gerade $y = x$. Noch steiler verläuft $y = 3x$.

$y = t \cdot x$ verläuft um so steiler, je größer t ist. Der Koeffizient t von x heißt daher auch die **Steigung** der Gerade. Ist $t < 0$, so fällt die Gerade, z. B. $y = -2x$. Die x-Achse, deren Gleichung $y = 0$ ist, hat die Steigung $t = 0$. Das Lot in O auf $y = 2x$ ist eine fallende Gerade, deren Steigung $t_1 = -\frac{1}{2}$ ist nach dem Höhensatz § 36, 2b. Das Lot in O auf $y = t \cdot x$ hat die Gleichung $y = -\frac{1}{t} \cdot x$.

$y = 2x + 1$ stellt ein Gerade dar, für deren sämtliche Punkte die Ortsbreite y um 1 (d. h. um die Längeneinheit) größer ist als die doppelte Ortslänge. Sie läuft der Gerade $y = 2x$ parallel (§ 20, 4), hat dieselbe Steigung $t = 2$ und schneidet auf der y-Achse die Strecke $OB_1 = 1$ ab. Die Ortslänge jedes Punktes dieser Gerade ist um $\frac{1}{2}$ kleiner als die halbe Ortsbreite, $x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$. Der Schnittpunkt A_1 mit der x-Achse hat die Ortsbreite $y = 0$ und folglich die Ortslänge $x = -\frac{1}{2}$.

Lehrsatz. $y = tx + b$ ist die Gleichung einer Geraden, die bei der Steigung t die Strecke b auf der y-Achse abtrennt.

Besonderer Fall. $y = tx$ stellt eine durch O gehende Gerade dar (da $b = 0$).

Zusätze. a. Parallele Geraden haben gleiche Steigung (d. h. denselben Koeffizienten von x) und umgekehrt. Z. B. $y = tx + b_1$ und $y = tx + b_2$.

b. Bei senkrechten Geraden ist das Produkt der Steigungen gleich -1. Z. B. $y = tx + b_1$ und $y = -\frac{1}{t} \cdot x + b_3$.

x und y bedeuten in der Gleichung $y = tx + b$, z. B. $y = 2x + 1$ die Ortsstrecken eines Punktes, der die Gerade in ihrer ganzen unendlichen Länge durchlaufen kann; sie heißen daher **laufende Ortsstrecken** (oder laufende Koordinaten).

5) Die Ortsstrecken jedes Punktes einer Geraden genügen ihrer Gleichung. Die Ortsstrecken des Schnittpunktes zweier Geraden genügen daher beiden Gleichungen; man berechnet sie, indem man die Gleichungen nach x und y auflöst. Z. B. $y = 2x + 1$ und $y = -\frac{1}{2}x + 6$ haben den Schnittpunkt $S = (2; 5)$, wie sich sowohl durch Zeichnung (Fig. 182) als auch durch Rechnung ergibt. $y = \frac{3}{4}x - 1$ schneidet die 1. Gerade in $T = (-1\frac{1}{2}; -2)$ und die 2. in $U = (6; 3)$. Man kann also aus den Gleichungen der Seiten eines Dreiecks die Ortsstrecken der Eckpunkte berechnen (vgl. § 53, 2).

Um eine Gerade, deren Gleichung gegeben ist, zu zeichnen, berechnet man zunächst die Ortsstrecken irgend zweier Punkte, am einfachsten der Schnittpunkte mit den Achsen $y = 0$ und $x = 0$, falls diese Schnittpunkte nicht für eine genaue Zeichnung zu nahe aneinander liegen. $y = tx + b$ gibt für $x = 0$ den Abschnitt $y = b$ auf der y-Achse und für $y = 0$ den Abschnitt $x = -\frac{b}{t}$ auf der x-Achse, der meist durch a bezeichnet wird; $a = -\frac{b}{t}$.

Die Schnittpunkte der Geraden mit den Achsen sind $A = (a; 0)$ und $B = (0; b)$. Z. B. für $y = \frac{3}{4}x - 1$ (Fig. 182) ist $A_3 = (1\frac{1}{2}; 0)$, $B_3 = (0; -1)$. Genauer läßt sich diese Gerade mit Hilfe eines entfernteren Punktes wie $P = (9; 5)$ zeichnen.

Bei allen Rechnungen ist auf die Bedeutung von x und y zu achten, besonders darauf, ob sie veränderliche Zahlen, also laufende Ortsstrecken, oder unveränderliche Zahlen, also die Ortsstrecken eines einzelnen Punktes, z. B. des Schnittpunktes zweier Geraden sind. In der Formel für den Abstand zweier Punkte (§ 53, 2) $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ kommen keine laufenden Ortsstrecken vor, sondern nur die gegebenen Ortsstrecken der beiden Punkte.

6) Da durch die Gleichung $y = tx + b$ die beiden Größen x und y miteinander verbunden sind, so daß aus jedem bestimmten Wert von x ein bestimmter Wert von y folgt, nennt man y eine Funktion von x.

Erklärung. y heißt eine **Funktion** von x, wenn y von x abhängig ist, so daß y sich ändert, wenn x sich ändert.

Man unterscheidet verschiedene Arten von Funktionen. Im folgenden bedeuten die Koeffizienten t, a, b, c ··· unveränderliche

Zahlen, während die veränderlichen durch x und y bezeichnet werden (§ 52, 7).

$y = ax + b$ heißt eine ganze (rationale) Funktion 1. Gr. v. x
$y = ax^2 + bx + c$ „ „ „ „ „ 2. „ x
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ „ „ „ „ „ 3. „ x

u. s. w. Gebrochene (rationale) Funktionen enthalten x im Nenner, irrationale im Radikanden, transzendente z. B. im Exponenten oder Logarithmanden.

Aus einer Gleichung 1. Grades mit zwei Unbekannten x und y (§ 52, 7) ergibt sich y stets als ganze Funktion 1. Grades (oder lineare Funktion) von x. Aber aus der allgemeinen Gleichung 2. oder höheren Grades mit zwei Unbekannten ergibt sich y als irrationale Funktion von x und nur in besonderen Fällen als ganze oder gebrochene (also rationale) Funktion.

7) Die Gleichung $2x + 3y + 4 = 0$ ist gleichbedeutend mit $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.

Lehrsatz. Jede Gleichung 1. Grades mit zwei Unbekannten $px + qy + r = 0$ stellt in der xy-Ebene eine Gerade dar, deren Steigung $t = -\frac{p}{q}$ und deren Abschnitt auf der y-Achse $b = -\frac{r}{q}$ ist.

Graphische Lösung. Zwei Gleichungen 1. Grades mit denselben beiden Unbekannten löst man graphisch, indem man die durch die Gleichungen bestimmten Geraden zeichnet und die Ortsstrecken des Schnittpunktes abmißt.

Z. B. $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 5x + 4y + 3 = 0 \end{array}\right\}$ haben den Schnittpunkt $S = (1; -2)$.

Einfache Lösungen haben auch:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y + 2 = 0 \\ 3x + 4y + 5 = 0 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{r} x - 3y + 13 = 0 \\ 3x - y - 17 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{array}\right.$$

Auch eine Gleichung mit einer Unbekannten kann auf diesem Wege gelöst werden, z. B. $\frac{3}{4}x + 5 = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$. Der gesuchte Wert x ist die Ortslänge des Schnittpunktes der Geraden $y = \frac{3}{4}x + 5$ und $y = -\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}$.

Ist in der Gleichung $px + qy + r = 0$ der Koeffizient $q = 0$, so läßt sie sich nicht auf die Form $y = tx + b$ bringen, weil man nicht durch 0 dividieren darf (§ 47, 1 Anm). Dann erhält man aus $px + r = 0$ $x = -\frac{r}{p}$; diese Gleichung stellt eine Parallele zur y-Achse dar, für deren Punkte die Ortslänge x unveränderlich ist und die Ortsbreite y folglich keine Funktion von x ist. Jede Gerade

aber, die nicht der y-Achse parallel läuft, hat eine Gleichung der Form $y = tx + b$, wo t und b irgendwelche positive oder negative, ganze oder gebrochene oder irrationale (aber reelle) Zahlen sind.

Verschiedene Geraden können nicht dieselbe Gleichung haben, und umgekehrt ändert sich mit t und b oder auch nur einer dieser Größen die Lage der Geraden.

Haben zwei Gleichungen mit denselben beiden Unbekannten keine Lösung (man nennt solche Gleichungen auch widersprechende § 52, 6) wie $px + qy + r_1 = 0$ und $px + qy + r_2 = 0$, so bestimmen sie zwei parallele Geraden; denn ihre Steigung $t = -\frac{p}{q}$ ist dieselbe, und für $q = 0$ ergeben sich zwei Parallelen zur y-Achse.

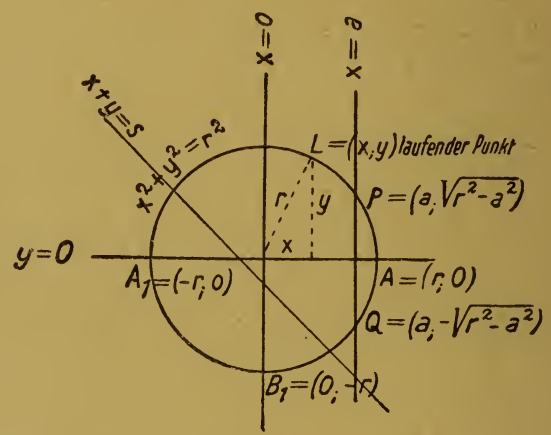


Fig. 183. Längeneinheit unbestimmt.

8) **Lehrsatz.** $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ist die Gleichung einer Geraden, die durch zwei gegebene Punkte $P = (x_1; y_1)$ und $Q = (x_2; y_2)$ geht.

Bew. durch den 2. Ähnlichkeitssatz (§ 35, 6) Fig. 181.

Folgerungen. a.) $t = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ist die Steigung der Geraden. (Differenzenquotient der Ortsstrecken der Punkte.)

b.) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ist die Gleichung einer Gerade, die die Strecken a und b auf den Achsen abtrennt (wie aus $x_1 = 0$, $y_1 = b$, $x_2 = a$, $y_2 = 0$ folgt oder aus der Zerlegung des Dreiecks $OAB = \frac{ab}{2}$ in die Teile $\frac{ay}{2}$ und $\frac{bx}{2}$); also ist $t = -\frac{b}{a}$ die Steigung der

Gerade (§ 53, 5) und $ax = by$ die Gleichung des Lotes von O (§ 53, 4 Zusatz b). Fig. 181.

Zusatz. $\frac{y - y_1}{x - x_1} = t$ ist die Gleichung einer Gerade, die durch den Punkt $P = (x_1; y_1)$ geht und die Steigung t hat (da aus $x = x_1$ der Wert $y = y_1$ folgt).

Den unendlich vielen Werten, die man t geben kann, entsprechen die unendlich vielen Geraden, die sich durch P ziehen lassen (Strahlenbüschel § 34, 1).

Hiernach kann man aus den Lösungen je zweier von drei Gleichungen die Gleichungen selber rückwärts herstellen oder aus den Ortsstrecken der drei Ecken die Gleichungen und Längen der Seiten, Schwerlinien und Höhen eines Dreiecks berechnen.

9) **Lehrsatz.** $x^2 + y^2 = r^2$ ist die Gleichung eines Kreises um O mit r. **Bew.** nach Fig. 183 durch den Satz des Pythagoras (§ 33, 3).

Der Kreis schneidet die Achsen in den Punkten $A = (r; 0)$, $B = (0; r)$, $A_1 = (-r; 0)$, $B_1 = (0; -r)$ und die Gerade $x = a$ in den Punkten $P = (a; +\sqrt{r^2 - a^2})$ und $Q = (a; -\sqrt{r^2 - a^2})$. Z. B. schneidet der Kreis $x^2 + y^2 = 25$ die Gerade $x = 4$ in $P = (4; 3)$, $Q = (4; -3)$.

Aus $x^2 + y^2 = r^2$ folgt $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; dies ist eine irrationale Funktion von x (§ 53, 6); zu jedem Wert von x gehören zwei Werte von y.

Die Ortsstrecken der Schnittpunkte eines Kreises mit einer Gerade genügen beiden Gleichungen $x^2 + y^2 = r^2$ und $y = tx + b$; man berechnet sie, indem man die Gleichungen nach x und y auflöst. Umgekehrt *löst man die Gleichungen graphisch*, indem man den Kreis und die Gerade zeichnet und die Ortsstrecken der Schnittpunkte abmißt (Fig. 183).

Auf Genauigkeit der Zeichnung ist besonders zu achten. Ob die gesuchten Wurzeln rational oder irrational sind (z. B. $\sqrt{30}$ oder $5\frac{1}{2}$), läßt sich durch Abmessen freilich nicht feststellen. Aber für viele Aufgaben sind angenäherte Werte ausreichend, und man kann überdies stets die Probe machen, d. h. durch Einsetzen der gemessenen Ortsstrecken in die gegebenen Gleichungen die Genauigkeit der Zeichnung prüfen (vielleicht auch ungenaue Werte verbessern), selbst wenn man die Gleichungen algebraisch (d. h. durch Rechnung) nicht lösen kann.

Z. B. $x^2 + y^2 = 6\frac{1}{4}$ und $x + y = \frac{1}{2}$ haben die Schnittpunkte $S_1 = (2; -1\frac{1}{2})$, $S_2 = (-1\frac{1}{2}; 2)$; dagegen haben $x^2 + y^2 = 36$ und $x + y = 4$ irrationale Wurzeln.

Durch Fortschaffen von y erhält man aus den beiden Gleichungen eine neue, der die Ortslängen x der Schnittpunkte ebenfalls genügen. Aus $x^2 + y^2 = r^2 = 6\frac{1}{4}$ und $x + y = a = \frac{1}{2}$ folgt $x^2 = ax - \frac{a^2 - r^2}{2}$, $x^2 = \frac{1}{2}x + 3$. Diese quadratische Gleichung ist durch den Kreis und die Gerade gleichfalls graphisch gelöst, da ihre Wurzeln die Ortslängen der Schnittpunkte sind (Fig. 183).

Auf diesem Wege kann man jede quadratische Gleichung mit einer Unbekannten, die man am besten auf die Form $x^2 = sx - p$ (s Summe, p Produkt der Wurzeln) bringt, graphisch lösen durch Zeichnung der Gerade $x + y = s$ und des Kreises $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$; denn durch Vergleichung von $x^2 = sx - p$

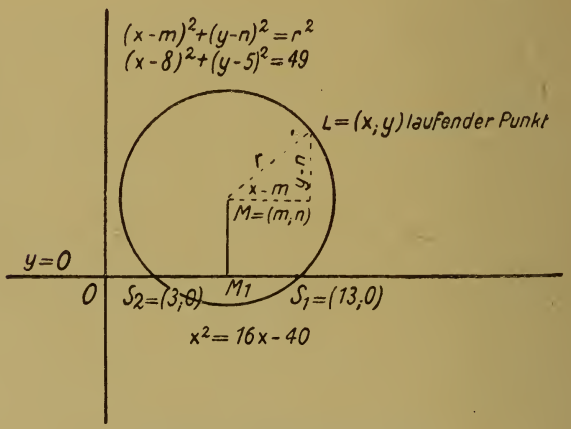


Fig. 184. Längeneinheit 2 mm.

mit $x^2 = ax - \frac{a^2 - r^2}{2}$ folgt $a = s$ und $\frac{a^2 - r^2}{2} = p$, also $r^2 = a^2 - 2p = s^2 - 2p$. Der Radius r läßt sich als mittlere Proportionale zu einem passend gewählten Wert k und $\frac{s^2 - 2p}{k}$ zeichnen (§ 36, 2).

Z. B. sind die Wurzeln von $x^2 = 3x + 18$ die Ortslängen der Schnittpunkte von $x + y = 3$ und $x^2 + y^2 = 45$, wo $r = \sqrt{45}$ die mittlere Proportionale zu 5 und 9 ist. — Für $x^2 = \frac{3}{2}x + 7$ ist $r = \sqrt{\frac{65}{4}}$ mittlere Proportionale zu 5 und $3\frac{1}{4}$ oder zu $2\frac{1}{2}$ und $6\frac{1}{2}$. Weitere Beispiele. $x^2 = \pm 5x \pm 6$, $x^2 = \pm 2x + 24$, $x^2 = \pm x + 6$, $x^2 = \pm \frac{3}{2}x + 13\frac{1}{2}$, $x^2 = \pm 6x - 8$, $x^2 = \pm 10x - 21$, $x^2 = \pm 3x - \frac{5}{4}$, $x^2 = sx \pm 1 \pm s$.

10) **Lehrsatz.** $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ ist die Gleichung eines Kreises mit r um den Punkt $M = (m; n)$.

Bew. nach Pythagoras.

Z. B. $(x-1)^2+(y-4)^2=25$, $(x-8)^2+(y-5)^2=49$. Fig. 184.

Hiernach kann man in manchen Fällen 2 quadratische Gleichungen graphisch lösen, z. B.

$(x+3)^2+(y-2)^2=17$ und $(x+2)^2+(y-1)^2=13$. Fig. 185.

Eine quadratische Gleichung mit 2 Unbekannten, deren allgemeine Form $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ist (§ 52, 7), stellt einen Kreis dar, wenn $b = 0$ und $a = c$ ist, wenn sie also die besondere Form $ax^2 + ay^2 + dx + ey + f = 0$ hat. Divi-

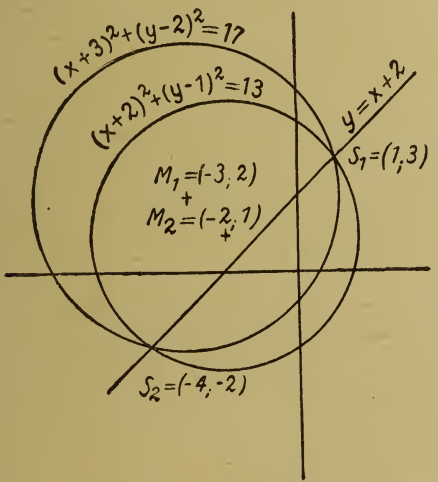


Fig. 185. Längeneinheit 1/2 cm.

diert man durch a und addiert die quadratischen Ergänzungen, so nimmt sie schließlich die Gestalt der allgemeinen Kreisgleichung an.

Z. B. $3x^2 + 3y^2 - 15x - 15y - 24 = 0$,

$x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = 8 + \frac{25}{4} + \frac{25}{4}$,

$(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = 20\frac{1}{2}$.

Ebenso $x^2 + y^2 - 2(x + y) = 38$. Diese beiden Gleichungen haben einfache Wurzeln.

Ferner kann man, wenn eine solche Gleichung und dazu eine beliebige Gleichung 1. Grades gegeben ist, die Lösung graphisch finden.

Z. B. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 34$, $x + 4y = 16$.

In dem besonderen Falle, daß die Gerade die x-Achse ist, also die Gleichung $y = 0$ hat, ergibt sich

$(x - m)^2 + n^2 = r^2$ oder $x^2 = 2mx + r^2 - m^2 - n^2$.

Die Wurzeln der Gleichung $x^2 = sx - p$ sind daher die Ortslängen der Schnittpunkte des Kreises

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + (y - n)^2 = \frac{s^2}{4} - p + n^2$$

mit der x-Achse. Die beliebige Zahl n kann dazu verwendet werden, dem Radius r einen einfachen, z. B. rationalen Wert zu verleihen. Für $n = 0$ ergibt sich die Konstruktion der algebraischen Ausdrücke (§ 52, 4) für die Wurzeln

$$x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - p};$$

der Radius $r = \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}$ ist zugleich mit den Wurzeln rational und sonst entweder als Kathete oder als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks konstruierbar, dessen andere beide Seiten $\frac{s}{2}$ und $\sqrt{\pm p}$ sind, oder auch als mittlere Proportionale zu einem passend gewählten Wert k und $\left(\frac{s^2}{4} - p\right) : k$ nach § 36, 2.

Beispiele. a) mit rationalen Wurzeln: $x^2 = \pm 8x + 20$, $x^2 = \pm 7x - 11\frac{1}{4}$, $4x^2 \pm 36x + 17 = 0$, $3x^2 \pm 11x - 42 = 0$, $5x^2 \pm 13x = 60$; b) mit irrationalen Wurzeln: $x^2 = \pm 6x - 2$ gibt $r = 4$ für $n = 3$, $x^2 = \pm 8x - 10$ gibt $r = \frac{7}{2}$ für $n = \frac{5}{2}$, $4x^2 \pm 12x - 31 = 0$, $x^2 = 16x - 40$ (Fig. 184).

Eine besonders einfache Zeichnung ergibt sich in jedem Falle, ob die Wurzeln rational oder irrational sind, wenn man $n = \frac{p+1}{2}$ wählt. Die Kreisgleichung heißt dann, da $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - p = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ ist,

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Dieser Kreis schneidet die y-Achse ($x = 0$) in den Punkten $B_1 = (0; 1)$ und $B_2 = (0; p)$, wie aus $y - \frac{p+1}{2} = \pm \frac{p-1}{2}$ folgt. Einer von ihnen genügt zur Zeichnung des Kreises. Der Radius ist rational oder irrational.

Zur graphischen Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = sx - p$ zeichne man $B = (0; 1)$ und $M = \left(\frac{s}{2}; \frac{p+1}{2}\right)$, schlage

um M mit $r = MB$ den Kreis und messe die Ortslängen seiner Schnittpunkte S_1 und S_2 mit der x-Achse; dies sind die gesuchten Wurzeln.

Der Beweis folgt auch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OSB und ACS, wenn $A = (0; s)$ und $C = (s; p)$; denn $OS : OB = AC : SA$ oder $x : 1 = p : (s - x)$.

Z. B. $x^2 = \pm 8x - 7$, $x^2 = \pm 8x - 5$, $x^2 = \pm 6x - 9$, $x^2 = \pm 6x + 7$, $x^2 = sx - 1$, $x^2 = \pm 4x - 3$, $x^2 = \pm 5x - 2$, $x^2 = \pm 5x + 2$.

11) Die einfachste quadratische Funktion $y = x^2$ wird durch eine Linie dargestellt, die (Fig. 186) durch den Nullpunkt geht und in den beiden ersten Quadranten (d. h. nach oben) symmetrisch zur y-Achse ins Unendliche verläuft. Der tiefste Kurvenpunkt ist der Nullpunkt, da y für jeden positiven oder negativen Wert von x positiv ist. Für jeden positiven Wert von y gibt es aber zwei Werte von $x = \pm \sqrt{y}$, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Diese Kurve kann mit Zirkel und Lineal nur punktweise gezeichnet werden. Sie heißt **Parabel** oder **Wurflinie** (weil sie — oder besser ihr Spiegelbild $y = -x^2$ in bezug auf die x-Achse — die Bahn angibt, in der ein geworfener Ball sich bewegt). Bei genauer Zeichnung auf Millimeterpapier könnte man sie dazu verwenden, Quadratzahlen und Quadratwurzeln abzulesen.

Die Parabel $y = x^2$ dient dazu, eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten $x^2 = sx - p$ einfach dadurch zu lösen, daß man ihre Schnittpunkte mit der Gerade $y = sx - p$ zeichnet und die Ortslängen x_1 und x_2 derselben abmißt (Fig. 186). Diese Lösung kann als rein graphisch bezeichnet werden, weil sie keine vorbereitenden Rechnungen (wie die früheren hinsichtlich des Kreisradius § 53, 9. 10) erfordert. Die einzige Schwierigkeit besteht in der Genauigkeit der Zeichnung der Parabel $y = x^2$, die mit der Genauigkeit der Kreiszeichnung naturgemäß nicht wetteifern kann.

Aus dieser Darstellung ersieht man auch bei ungenauer Zeichnung, daß die Gleichung $x^2 = sx - p$ für einen negativen Wert von p stets zwei verschiedene (reelle) Wurzeln hat, eine positive und eine negative, die mit s das Vorzeichen wechseln und überhaupt mit s und mit $-p$ wachsen und abnehmen. Für einen positiven Wert von p haben die beiden Linien (Parabel und Gerade) entweder gar keinen Schnittpunkt oder zwei im 1. Quadranten (die im Grenzfalle der Berührung in einen verschmelzen) oder zwei im

2. Quadranten (die Spiegelbilder derjenigen des 1. Quadranten, falls s nur das Vorzeichen wechselt). Imaginäre Wurzeln ergeben sich bei graphischen Lösungen nicht.

12) Die quadratische Gleichung $x^2 = sx - p$ kann man schließlich auch dadurch graphisch lösen, daß man die Kurve $y = x^2 - sx + p$ punktweise zeichnet und die Ortsstrecken ihrer Schnittpunkte mit der x-Achse ($y = 0$) abmißt. Diese Kurve ist der Parabel $y = x^2$ kongruent und geht durch Parallelverschiebung in sie über. Ihre Schnittpunkte mit der x-Achse findet man ungefähr, wenn man zwei dieser Achse nahe liegende Punkte geradlinig verbindet.

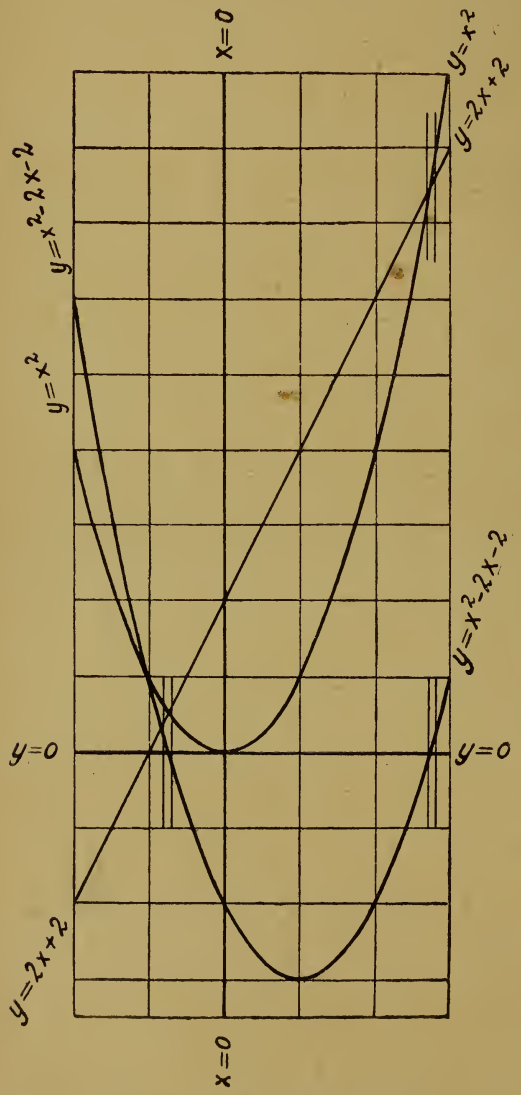


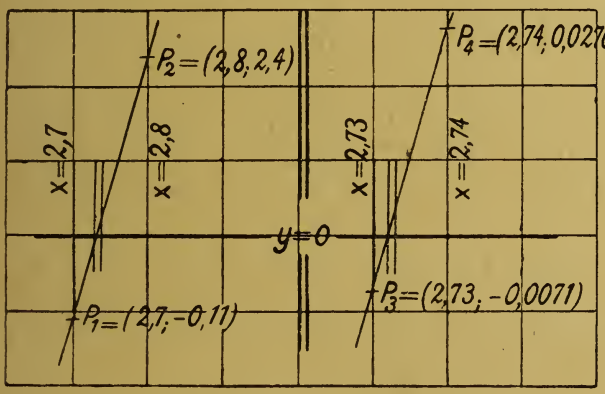
Fig. 186. Längeneinheit 1 cm.

Erhält man dadurch einen zu ungenauen Wert von x, für den also y zu stark von 0 abweicht, so verbinde man den hiernach in neuer Zeichnung mit größerer Längeneinheit (z. B. 1 dm statt 1 cm) dargestellten 3. Kurvenpunkt mit einem der beiden ersten oder einem 4., der näher am 3. liegt, und verfahre wie mit den beiden ersten Kurvenpunkten. Dadurch erhält man immer genauere Werte von x.

Nach diesem Ver-

fahren, das man kurz als das der **regula falsi** bezeichnet, kann man jede beliebige Gleichung mit einer Unbekannten, deren Koeffizienten bestimmte reelle Zahlen sind, auch transzendente Gleichungen (z. B. $x^x + \log(3 + 10x) = 50$) durch immer weiter gehende Annäherung lösen.

In Fig. 186 ist die Gleichung $x^2 = 2x + 2$ auf 2 Arten graphisch gelöst. In Fig. 186a und b ist die eine Lösung nach der regula falsi verbessert. Da nämlich, wie aus Fig. 186 ersichtlich, die eine Wurzel x_1 zwischen 2,7 und 2,8 liegt, ist in Fig. 186a der zwischen $x = 2{,}7$ und $x = 2{,}8$ liegende Teil der Zeichnung von Fig. 186 zehnmal vergrößert, also mit 1 dm statt 1 cm als Längeneinheit dargestellt. Die Kurve ist dabei durch



1 dm. Längeneinheit 1 m.

Fig. 186a. Fig. 186b.

eine Gerade ersetzt, weil ein Teil einer Kurve um so weniger von einer Gerade abweicht, je kürzer er ist. Auf dieser Voraussetzung beruht die regula falsi. Man ersieht aus Fig. 186a, daß x_1 zwischen 2,73 und 2,74 liegt, und findet dies durch Einsetzen bestätigt; denn zu $x = 2{,}73$ gehört $y = -0{,}0071$ und zu $x = 2{,}74$ gehört $y = 0{,}0276$. Aus Fig. 186b mit 1 m als Längeneinheit ersieht man schließlich, daß x_1 zwischen 2,732 und 2,733, aber sehr nahe an 2,732 liegt, was gleichfalls durch Einsetzen bestätigt wird. So könnte man durch fortschreitende Annäherung die Wurzel x_1 mit beliebiger Genauigkeit bestimmen; die 2. Wurzel ist $x_2 = s - x_1$. Es ist dies im Grunde nichts anderes als ein Ausprobieren, das aber nicht aufs Geratewohl, sondern nach einem bestimmten Plane,

nämlich gemäß der regula falsi erfolgt und daher ziemlich schnell zum Ziel, d. h. zu der erforderten Genauigkeit führt.

13) Mittelst graphischer Darstellung der wichtigsten Funktionen kann man viele durch Rechnung nur schwer oder überhaupt nicht lösbare Gleichungen schon durch einfachste Abmessung angenähert lösen, wie im folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden soll. Auch hier kann man durch genauere Zeichnung mit vergrößerter Längeneinheit ungenaue Werte verbessern.

1. Beispiel. $x^2 = \sqrt{x} + a$.

Aus der Darstellung der Funktion $y = x^2$ und der inversen (d. h. durch Vertauschung von x und y hervorgehenden) Funktion $y = \sqrt{x}$ auf Millimeterpapier (Fig. 187) kann man durch Anlegen eines Lineals mit Millimeterteilung x für die verschiedenen Werte von a (z. B. $a = 3$ gibt $x = 2{,}1$) sofort ablesen. Bei Benutzung einer Zahlentabelle für die Quadrate und Quadratwurzeln kann man durch Subtraktion oder Addition ($x^2 \mp \sqrt{x} = a$) den Wert von x vielleicht genauer finden; aber der Vorzug der graphischen Darstellung besteht darin, daß man sofort eine Übersicht über den Zusammenhang zwischen x und a hat, ohne die Funktion $y = x^2 \mp \sqrt{x}$ erst berechnen oder darstellen zu brauchen. Für $a = 0$ ist $x = 1$ oder $x = 0$. Man sieht, daß a auch negativ sein kann, aber nicht kleiner als etwa 0,47, und zwar für $x \approx 0{,}4$. Es empfiehlt sich, die Kurven für $x = 0$ bis $x = 1$ mit 1 dm als Längeneinheit zu zeichnen.

Die Kurve $y = x^2$ und die inverse $y = \sqrt{x}$ liegen symmetrisch zur Halbierungslinie des Achsenwinkels $y = x$, wie überhaupt zwei Punkte, bei denen x und y nur vertauscht sind.

2. Beispiel. $x^3 = \sqrt{x} + a$.

Lösung ebenfalls nach Fig. 187. Kleinster Wert $a \approx -0{,}58$ für $x \approx 0{,}5$.

Die Kurve $y = x^3$ heißt auch **kubische Parabel** oder Parabel 3. Grades. Sie geht durch den Nullpunkt und läuft im 1. Quadranten (also nach oben) wie im 3. Quadranten (nach unten) ins Unendliche. Die beiden Teile sind kongruent und lassen sich, da mit x zugleich auch y nur das Vorzeichen wechselt, nach einer um den Nullpunkt in der Ebene ausgeführten Drehung um 180° zur Deckung bringen.

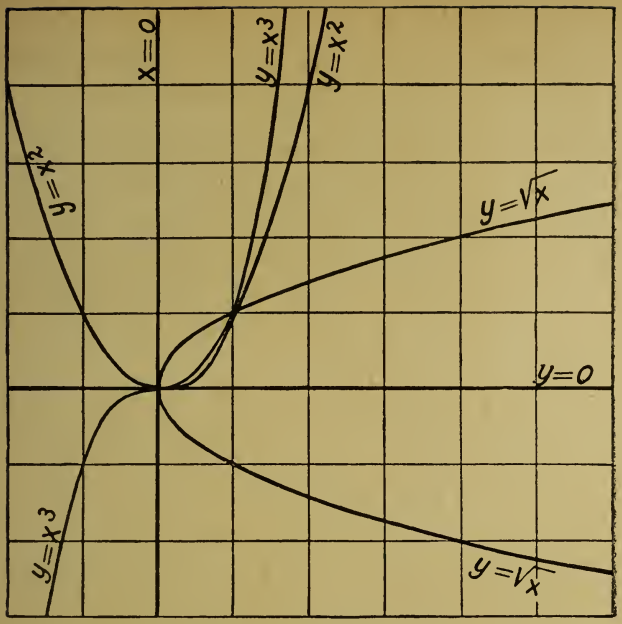


Fig. 187. Längeneinheit 1 cm.

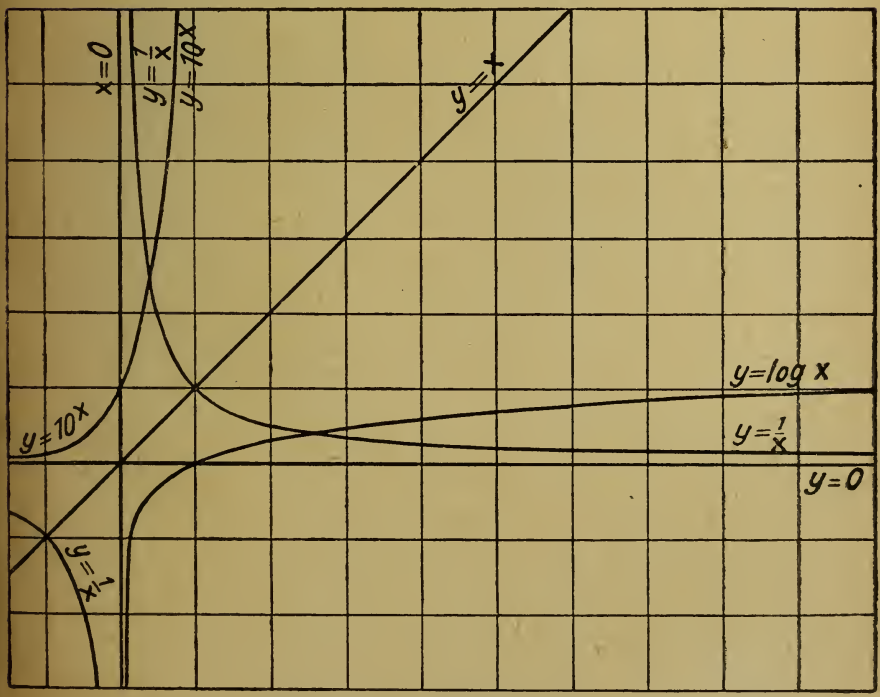


Fig. 188. Längeneinheit 1 cm.

3. Beispiel. $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} + a$.

Lösung durch die inversen Funktionen $y = x^2$ oder $x = \sqrt{y}$ und $y = x^3$ oder $x = \sqrt[3]{y}$ nach Fig. 187 (x-Achse nach oben gedreht).

4. Beispiel. $x^2 = \sqrt[3]{x} + a$.

Lösung ebenfalls durch die inversen Funktionen nach Fig. 187.

5. Beispiel. $10^x = \log x + a$. Fig. 188.

Der kleinste Wert von a ist hier nicht zu verwechseln mit dem Abstand (d. h. der kürzesten Verbindungslinie) der beiden Kurven.

6. Beispiel. $\frac{1}{x} = 10^x + a$. Fig. 188.

Für $a = 0$ ist $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 10$ oder $x = -\log x \approx 0{,}4$.

7. Beispiel. $\frac{1}{x} = \log x + a$. Fig. 188.

Für $a = 0$ ist $x^x = 10$, also x der reziproke Wert des vorigen; $x \approx 2{,}5$.

Weitere Beispiele zu den in Fig. 187 und 188 dargestellten Kurven, die auf demselben Blatt zu zeichnen sind.

$x^2 = 10^x$, $\sqrt{x} = \log x$, $x^3 = 10^x - a$, $x^3 = ax + b$, $x^3 = \frac{1}{x} + a$.

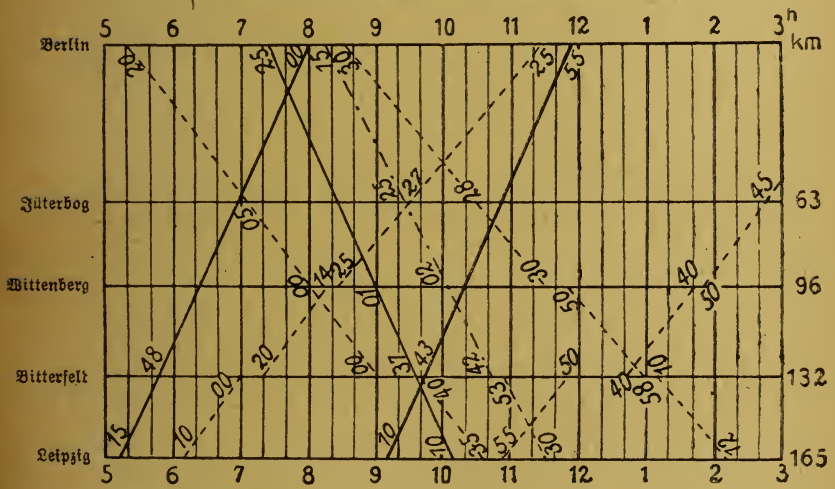
Die Kurve $y = \frac{1}{x}$ (Fig. 188) besteht aus zwei getrennten, im 1. und 3. Quadranten liegenden kongruenten Zweigen, hat beide Winkelhalbierenden $y = x$ und $y = -x$ zu Symmetrieachsen und fällt mit ihrer inversen Funktion zusammen. Sie ist eine **Hyperbel**, die sich in der Ferne immer mehr an die Ortsachsen anschmiegt; man nennt diese daher Asymptoten (oder Fernstreifende) der Kurve. — Die Ortsstrecken jedes Kurvenpunktes geben z. B. die Seiten eines Rechtecks vom Flächeninhalt $F = 1$ oder nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte Druck und Volumen eines Gases von der Masse 1 bei gleichbleibender Temperatur.

14) Graphische Darstellungen werden bei vielen Gelegenheiten verwendet, auch wenn der Zusammenhang zweier Größen nicht mathematisch, d. h. durch eine Gleichung ausgedrückt ist. Eine Fieberkurve z. B. ist von großer Wichtigkeit, um den Zustand des Kranken zu erkennen. Aus einer Temperaturkurve übersieht man mit einem Blick die Wärmeschwankungen im Laufe des Tages oder Jahres;

ebenso aus entsprechenden Kurven die Schwankungen des Luftdrucks oder des Feuchtigkeitsgehalts der Luft; aus graphischen Eisenbahnfahrplänen die verschiedenen Geschwindigkeiten der Züge, Zeit und Ort der Begegnung zweier Züge u. s. w.

Zeichnungen wie Fig. 189, die einem graphischen Fahrplan nachgebildet ist, können zur Lösung von Bewegungsaufgaben, wie sie sich in den Aufgabensammlungen finden, verwendet werden. Solche Zeitwegkurven erfordern, um richtig verstanden zu werden, eine geistige Umarbeitung, an die man sich schnell gewöhnt, und sind nicht etwa mit den durchlaufenen Wegen selber zu verwechseln.

Graphischer Eisenbahnfahrplan.



Maßstab für die Längen 1 : 3.10^6. Maßstab für die Zeiten 3 mm : 20 Min.

Fig. 189.

—— D-Zug, —·—·— Eilzug, ---- Personenzug.

Die Minutenzahlen sind in die Zeichnung hineingeschrieben. Die Geschwindigkeit des 2. von Leipzig abgehenden Zuges verringert sich von Wittenberg an, wie aus den Angaben der Zeichnung genau zu berechnen. Die beiden ersten Züge begegnen sich um 7 Uhr vorm. 3 km von Jüterbog entfernt nach Berlin zu. — Bei einer Geschwindigkeit von 27 km in der Stunde würde die Linie des Zuges der Halbierungslinie des Achsenwinkels parallel laufen (für die angegebenen Maßstäbe der Länge und Zeit).

Arithmetische Formelsammlung,

enthaltend die wichtigsten Formeln zum Lösen von Aufgaben und zum Kopfrechnen mit Buchstaben.

I. Addition, Subtraktion, Multiplikation.

1) $x+(a+b-c)=x+a+b-c$ § 43,8, 1a) $x+y+(x-y)=2x$

2) $x-(a+b-c)=x-a-b+c$ § 43,9, 2a) $x+y-(x-y)=2y$

2b) $a-(a-b)=b$

3) $a-(-b)=a+b$ § 44, 3, 3a) $a-(-a)=2a$,

3b) $-(a-b)=b-a$, 3c) $-(-a)=+a$

4) $a\cdot 0=0$ § 45, 5, aber 4a) $a+0=a$

5) $x\cdot x=x^2$ § 45, 10, aber 5a) $x+x=2x$

6) $(a+b-c)\cdot x=ax+bx-cx$ § 45, 4,

aber 6a) $(a\cdot b)\cdot x=abx=axb=\ldots$ § 45, 3

z. B. $37\cdot 3=30\cdot 3+7\cdot 3$, $29\cdot 4=30\cdot 4-1\cdot 4$,

aber $(30\cdot 7)\cdot 3=630$

6b) $ax+a=a(x+1)$, z. B. $29\cdot 99+29=2900$

7) $(-a)\cdot(-b)=+ab$ § 45, 7, 7a) $(-a)\cdot(-1)=+a$,

7b) $(-a)^2=+a^2$, 7c) $(-a)^3=-a^3$,

aber 7d) $(-a)+(-a)=-2a$

8) $(a+b)\cdot(x+y)=ax+ay+bx+by$ § 45, 9, § 32, 10

8a) $(x+2)\cdot(x+3)=x^2+5x+6$

z. B. $52\cdot 36=30\cdot 2+30\cdot 50\cdot 6\cdot 2+6\cdot 50$ beim schriftlichen Multiplizieren.

9) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, aber 9a) $(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$ § 46, § 32, 10. 11

10) $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ § 46, § 32, 12, z. B. $99^2=\ldots$

II. Division. § 47.

11) $\frac{a}{b}\cdot b=a$ Erkl. § 47, 1 [wie $a-b+b=a$ § 43, 1]

12) $a:a=1$, aber 12a) $a-a=0$, 12b) $0:a=0$

13) $\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}$ § 47, 8, 13a) $\frac{a}{ab}=\frac{1}{b}$, 13b) $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$,

13c) $a=\frac{2a}{2}=\frac{3a}{3}=\ldots$, 13d) $\frac{ax+bx}{cx}=\frac{a+b}{c}$

14) $\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}$ § 47, 11, 14a) $\frac{-a}{-1}=+a$, 14b) $\frac{a}{-a}=-1$,

14c) $\frac{a-b}{x-y}=\frac{b-a}{y-x}$

15) $\frac{a+b-c}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}-\frac{c}{x}$ § 47, 3, z. B. $\frac{201}{3}=\frac{180}{3}+\frac{21}{3}$

15a) $\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1$

16) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{ay+bx}{xy}$, 16a) $\frac{a}{x}+\frac{b}{2x}=\frac{2a+b}{2x}$,

16b) $\frac{1}{a}\pm\frac{1}{b}=\frac{b\pm a}{ab}$, 16c) $\frac{a}{x}+b=\frac{a+bx}{x}$, z. B. $2{,}34=\frac{234}{100}$,

16d) $a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$, 16e) $a\pm\frac{1}{2}=\frac{2a\pm 1}{2}$

17) $\frac{a}{b}\cdot x=\frac{a\cdot x}{b}$ § 47, 4 [wie $a-b+x=a+x-b$],

17a) $\frac{a}{b}\cdot 2b=2a$, z. B. $\frac{27}{28}\cdot 56=54$, 17b) $a\cdot b\cdot\frac{a}{b}=a^2$

18) $\frac{a}{b}:x=\frac{a}{b\cdot x}$ § 47, 6 18a) $\frac{a}{b}:a=\frac{1}{b}$, z. B. $\frac{27}{28}:54=\frac{1}{56}$

19) $\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{a\cdot x}{b\cdot y}$ § 47, 7, 19a) $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$, 19b) $\left(-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$,

19c) $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$

20) $\frac{a}{b}:\frac{x}{y}=\frac{a\cdot y}{b\cdot x}$ § 47, 7, 20a) $\frac{a}{b}:\frac{x}{b}=\frac{a}{x}$, 20b) $\frac{a}{b}:\frac{a}{y}=\frac{y}{b}$,

20c) $\frac{a}{b}:\frac{b}{a}=\frac{a^2}{b^2}$, 20d) $x:\frac{a}{b}=\frac{x\cdot b}{a}$, 20e) $a:\frac{a}{b}=b$,

20f) $1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$, 20g) $a:\frac{1}{b}=a\cdot b$, 20h) $a:\frac{1}{a}=a^2$,

20i) $1:\frac{1}{a}=a$, 20k) $a\cdot b:\frac{a}{b}=b^2$

III. Gleichungen 1. Grades.

21) Aus $a-x=b$ folgt $x=a-b$

22) Aus $\frac{a}{x}=b$ folgt $x=\frac{a}{b}$

23) Aus $ax+b=cx+d$ folgt $x=\frac{d-b}{a-c}$

23a) Aus $3x=5x$ folgt $x=0$ § 47, 1. Anm.

24) Aus $x^2=a\cdot x$ folgt $x_1=0$, $x_2=a$

24a) $(x-a)\cdot(x-b)=0$ folgt $x_1=a$, $x_2=b$ § 45, 5

25) Aus $\left.\begin{aligned}x+y&=a\\x-y&=b\end{aligned}\right\}$ folgt $\left\{\begin{aligned}x&=\frac{a+b}{2},\\y&=\frac{a-b}{2}\end{aligned}\right.$ § 52, 5

IV. Proportionen. § 48.

26) $a\,x$ und $b\,x$ sind 2 Zahlen, die sich wie a zu b verhalten.
Aus $a:b=c:d$ folgt (27, 28, 29):

27) $a\cdot d=b\cdot c$, $a=\frac{b\cdot c}{d}$, $b=\frac{a\cdot d}{c}$, ... § 34, 7

28) $a:c=b:d$, $d:b=c:a$, ... (i. g. 8 Formen)

29) $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$, $\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ § 34,5 VII

30) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\ldots$ auch $=\frac{a_1+b_1+c_1+\ldots}{a_2+b_2+c_2+\ldots}$ § 48,12, § 35,14a

V. Potenzieren. § 49.

31) $\frac{a^x\cdot a^y}{a^z}=a^{x+y-z}$ § 49, 5. 6, 31a) $\frac{a^{2n}}{a^n}=a^n$, 31b) $a^0=1$,

31c) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ § 49, 7, 31d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$ § 49, 8

32) $\left(\frac{a\cdot b}{c}\right)^x=\frac{a^x\cdot b^x}{c^x}$ § 49, 2. 3, z. B. $625\cdot 16=10000$ (vgl. 6)

33) $(a^x)^y=a^{x\cdot y}=(a^y)^x$ § 49, 4, 33a) $(-a)^{2n}=a^{2n}$,
33b) $(-a)^{2n-1}=-a^{2n-1}$, wo n eine ganze Zahl bedeutet.

34) $\frac{a^{2x}-b^{2y}}{a^x-b^y}=a^x+b^y$, 34a) $\frac{x^{2n}-1}{x^n-1}=x^n+1$

35) $a+b\cdot 10+c\cdot 10^2+d\cdot 10^3+\ldots$ ist die allgem. dekad. Zahl.

VI. Radizieren. § 50.

36) $\left(\sqrt[x]{a}\right)^x=a$ Erkl. § 50, 1 36a) $\sqrt[x]{a^x}=a$ 36b) $\sqrt[1]{a}=a$,
36c) $\sqrt[n]{1}=1$

37) $\sqrt[x]{\frac{a\cdot b}{c}}=\frac{\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}}{\sqrt[x]{c}}$ § 50, 3. 4 (vgl. 15), 37a) $\sqrt{-1}=i$ Erkl.

37b) $\sqrt{-x}=i\cdot\sqrt{x}$, 37c) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$, z. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

38) $\sqrt[x]{a^y}=\left(\sqrt[x]{a}\right)^y$ § 50, 5 vgl. 17), z. B. $\sqrt{25^3}=5^3$

39) $\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}=\sqrt[x\cdot y]{a}=\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}}$ § 50, 6 (vgl. 18)

40) $\sqrt[n\cdot x]{a^{n\cdot y}}=\sqrt[x]{a^y}$ § 50,7 (vgl. 13), 40a) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$, z. B. $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$,

40b) $a^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$, 40c) $a^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{a^x}$ § 50, 8

VII. Logarithmieren. § 51.

Log bezieht sich auf eine beliebige Grundzahl, log nur auf 10

41) $g^{\text{Log } a_{(g)}} = a$ Erkl. § 51, 1, 41a) $\text{Log } g^a{}_{(g)} = a$, 41b) $\text{Log } 1_{(g)} = 0$

42) $\text{Log } \frac{a \cdot b}{c} = \text{Log } a + \text{Log } b - \text{Log } c$ bei derf. Grundzahl, § 51, 3. 4,

42a) $\text{Log } \frac{1}{x} = -\text{Log } x$

43) $\text{Log } a^n = n \cdot \text{Log } a$ § 51, 5 bei derselben Grundzahl,

43a) $\log (10^k \cdot a) = k + \log a$, k Kennziffer für $1 < a < 10$

44) $\text{Log } \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \text{Log } a$ § 51, 6 bei derselben Grundzahl.

45) $\text{Log } a_{(b)} = \frac{\text{Log } a_{(g)}}{\text{Log } b_{(g)}}$ § 51, 8, 45a) $\text{Log } a_{(b)} = \frac{1}{\text{Log } b_{(a)}}$

46) $d = n \cdot \frac{D}{10}$ ist zu dem aus der Tafel entnommenen Logarithmus zu addieren beim Aufsuchen des Logarithmus.

46a) $n = d : \frac{D}{10}$ ist die letzte Ziffer des Numerus, d kl. Differenz, D Tafeldifferenz.

47) Aus $g^{ax+b} = h^{cx+d}$ folgt $x = \frac{\log (h^d : g^b)}{\log (g^a : h^c)}$,

47a) Aus $3^x = 5^x$ folgt $x = 0$ (vgl. 23a)

48) Aus $x^2 = sx - p$ folgt $x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}$, $x_1 + x_2 = s$, $x_1 \cdot x_2 = p$ § 52, 4

49) $z = \frac{a \cdot p \cdot n}{100}$ M Zinsen erhält man von aM Kapital zu p% in n Jahren (3 Umk.)

50) $c = a \cdot q^n$ ist der Endwert, auf den durch Zinseszins zu p% in n Jahren das Anfangskapital a anwächst, wenn $q = \frac{p}{100} + 1$ (Zinsfaktor). (3 Umk.)

50a) $x = q^n$ gibt die Zeit (n) oder den Zinsfuß $[p = (q-1) \cdot 100]$ der Verixfachung des Kapitals.

I. Tabelle der wichtigsten Maße.

(Zum Auswendiglernen.)

a) Längenmaße.

1 km = 1000 m
1 m = 100 cm
1 cm = 10 mm

b) Flächenmaße.

1 qkm = 100 ha
1 ha = 100 a
1 a = 100 qm
1 qm = 10 000 qcm
1 qcm = 100 qmm

c) Körper-(Hohl-)maße.

1 cbm = 10 hl
1 hl = 100 l
1 l = 1000 ccm
1 ccm = 1000 cmm

d) Gewichte.

1 t = 1000 kg
1 kg = 1000 g
1 g = 1000 mg
(1 dz = 100 kg)

II. Die kleinen griechischen Buchstaben.

α	Alpha.	ν	Ny.
β	Beta.	ξ	Xi.
γ	Gamma.	o	Omikron.
δ	Delta, Δ (großes Delta).	π	Pi.
ε	Epsilon.	ϱ	Rho.
ζ	Zeta.	σ	Sigma, Σ (großes Sigma).
η	Eta.	τ	Tau.
ϑ	Theta.	υ	Ypsilon.
ι	Jota.	φ	Phi.
$\varkappa$	Kappa.	χ	Chi.
λ	Lambda.	ψ	Psi.
μ	My.	ω	Omega.

Pierersche Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 111479983